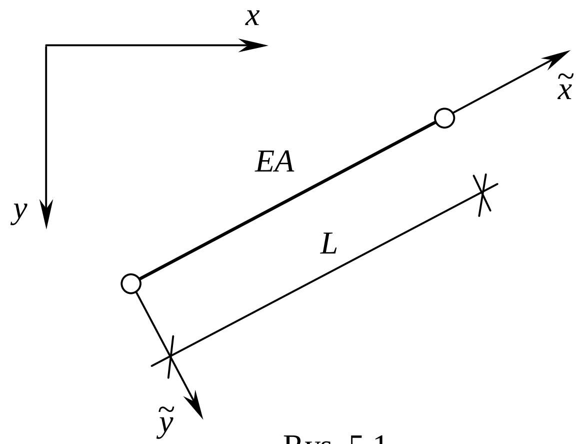
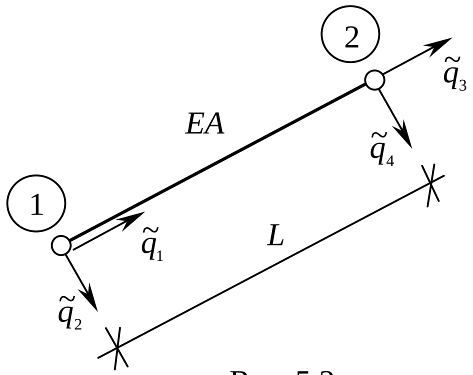
5. Macierz sztywności elementu kratownicy

Wyznaczyć elementy macierzy sztywności elementu będącego prętem kratownicy przedstawionego na rys. 5.1. Dane: $EA = \text{const.}$



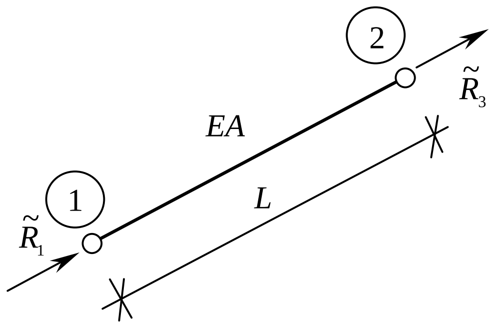
Rys. 5.1

Wprowadzamy przemieszczenia węzłów, które zdefiniowane będą w lokalnym układzie współrzędnych pręta $\tilde{x}, \tilde{y}$ (rys. 5.2):



Rys. 5.2

oraz stowarzyszone z nimi siły przywęzłowe (rys. 5.3):



Rys. 5.3

Przemieszczenia węzłów pręta oraz siły przywęzłowe związane są równaniem zapisanym w uogólnionej postaci macierzowej:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^k \cdot \tilde{\mathbf{q}}_e^k = \tilde{\mathbf{R}}_e^k \tag{5.1a}$$

Zauważmy, że składowe reakcji węzłowych prostopadle do osi pręta $\tilde{R}_2$ i $\tilde{R}_4$ są równe zeru. Dlatego równanie macierzowe (5.1a) można zapisać w formie bezpośredniej:

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} & \tilde{k}_{14} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & \tilde{k}_{24} \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} & \tilde{k}_{34} \\ \tilde{k}_{41} & \tilde{k}_{42} & \tilde{k}_{43} & \tilde{k}_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}_1 \\ 0 \\ \tilde{R}_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.1b}$$

gdzie:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^k = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} & \tilde{k}_{14} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & \tilde{k}_{24} \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} & \tilde{k}_{34} \\ \tilde{k}_{41} & \tilde{k}_{42} & \tilde{k}_{43} & \tilde{k}_{44} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

jest macierzą sztywności *elementu kratowego*,

$$\tilde{\mathbf{q}}_e^k = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

jest wektorem przemieszczeń węzłowych *elementu kratowego*, a

$$\tilde{\mathbf{R}}_e^k = \begin{Bmatrix} \tilde{R}_1 \\ 0 \\ \tilde{R}_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.4}$$

jest wektorem sił przywęzłowych *elementu kratowego*. Indeks dolny „*e*”, oznacza, że twory te przyporządkowane są *elementowi*, tzn.: macierz sztywności *elementu kratowego* $\tilde{\mathbf{k}}_e^k$, wektor przemieszczeń węzłowych *elementu kratowego* $\tilde{\mathbf{q}}_e^k$ oraz wektor sił przywęzłowych *elementu kratowego* $\tilde{\mathbf{R}}_e^k$.

Z uwagi na to, że aktywnymi przemieszczeniami wywołującymi deformację pręta są $\tilde{q}_1$ i $\tilde{q}_3$, a siły przywęzłowe $\tilde{R}_2$ i $\tilde{R}_4$ są równe zeru, macierz sztywności $\tilde{\mathbf{k}}_e^k$ będzie miała postać:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Macierz sztywności elementu kratowego jest zbliżona w swojej budowie do macierzy sztywności elementu prętowego.