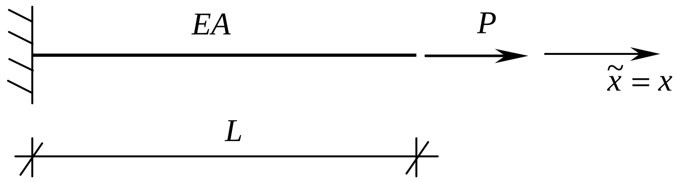
6. Statyka prętów pracujących osiowo

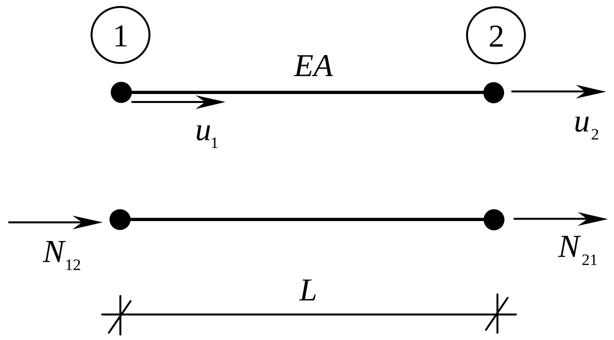
Zadanie 6.1

Wyznaczyć siły wewnętrzne dla pręta obciążonego osiowo siłą skupioną *P*, o schemacie statycznym przedstawionym na rysunku 6.1. Do rozwiązania zadania zastosować ujęcie macierzowe. Dane: $EA = \text{const.}$, *L*.



Rys. 6.1

Do rozwiązania zadania wykorzystamy sformułowanie macierzowe zadania, które opisane jest równaniem (1.9). Ponieważ konstrukcja ograniczona jest tylko do jednego elementu, dlatego zadanie rozwiązywać będziemy w jednym układzie współrzędnych opisanym osią pręta $\tilde{x} = x$. Oznaczmy węzły, przemieszczenia węzłów i siły przywęzłowe (rys. 6.2):



Rys. 6.2

Układ równań wiążących przemieszczenia węzłów z siłami przywęzłowymi będzie miał postać:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{Bmatrix} \tag{6.2}$$

Układ równań (6.2) opisuje jednocześnie prace całej konstrukcji. Macierz sztywności

$$\mathbf{k} = \tilde{\mathbf{k}}_e^p = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

jest osobliwa, tzn. jej wyznacznik jest równy zero. Nie zostały bowiem jeszcze określone warunki brzegowe. Wektor sił przywęzłowych $\tilde{\mathbf{R}}_e^p$ spełnia w tym najprostszym przykładzie jednocześnie role wektora obciążenia (prawej strony).

Warunek brzegowy w węźle „1” określa zerowe przemieszczenie poziome $u_1 = 0$. Wobec tego, należy tak zmodyfikować macierz sztywności i wektor prawej strony, aby ten warunek wprowadzić. Warunek taki określa się przez wstawienie niezerowego elementu na głównej przekątnej macierzy sztywności (zwykle posługujemy się wartością jednostkową), zerowych pozostałych elementów wiersza odpowiadającego obciążeniu po kierunku przemieszczenia u_1 i zerowych pozostałych elementów kolumny, symetrycznych do elementów wiersza. Modyfikując wektor prawej strony, należy również wstawić element zerowy w wierszu odpowiadającym obciążeniu po kierunku przemieszczenia u_1. Jednocześnie, w wierszu wektora prawej strony odpowiadającemu obciążeniu po kierunku przemieszczenia u_2 wstawiamy wartość siły P ze znakiem dodatnim, ponieważ siła działa zgodnie z założonym zwrotem przemieszczenia u_2. Układ równań (6.2) przyjmie teraz formę:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \tag{6.4}$$

lub stosując zapis bezpośredni:

$$\begin{aligned} &1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = 0 \\ &0 \cdot u_1 + \frac{EA}{L} \cdot u_2 = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Po rozwiązaniu układu równań (6.4) otrzymamy przemieszczenia węzłów:

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = \frac{P \cdot L}{EA} \tag{6.6}$$

Teraz ponownie wykorzystujemy układ równań (6.2) podstawiając obliczone w równaniu (6.6) przemieszczenia węzłów. Obliczamy siły przywęzłowe. Otrzymujemy:

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P \cdot L}{EA} \end{Bmatrix} \tag{6.7}$$

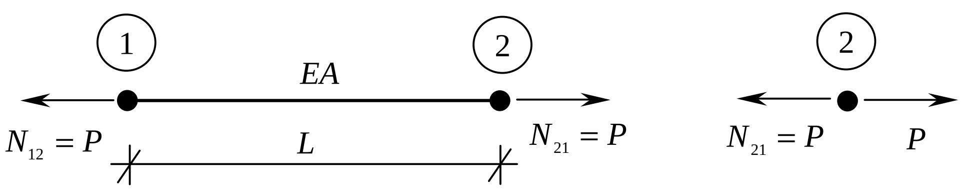
W klasycznym zapisie, układ równań (6.7) przyjmie formę:

$$N_1 = \frac{EA}{L} \cdot 0 + \left(-\frac{EA}{L} \right) \cdot \frac{P \cdot L}{EA}$$
$$N_2 = \left(-\frac{EA}{L} \right) \cdot 0 + \frac{EA}{L} \cdot \frac{P \cdot L}{EA} \tag{6.8}$$

Wektor sił przywęzłowych będzie miał postać:

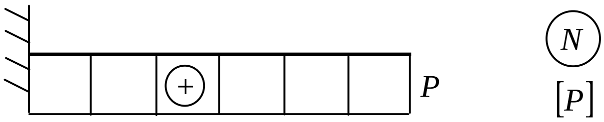
$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{Bmatrix} = \cdot \begin{Bmatrix} -P \\ P \end{Bmatrix} \tag{6.9}$$

tzn. siła przywęzłowa N_{12} zmieni swój zwrot na przeciwny do założonego, a siła przywęzłowa N_{21} ma zwrot zgodny ze zwrotem osi układu współrzędnych. Jednocześnie spełnione są warunki równowagi węzłów (rys. 6.3).



Rys. 6.3

Na rysunku 6.4 przedstawiono wykres sił normalnych *N*:



Rys. 6.4