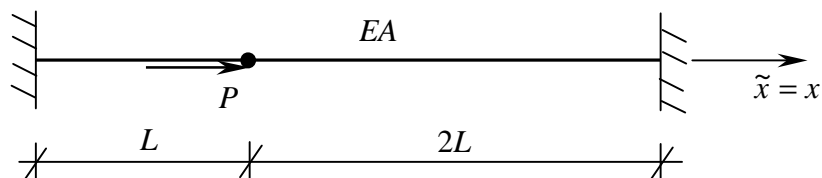


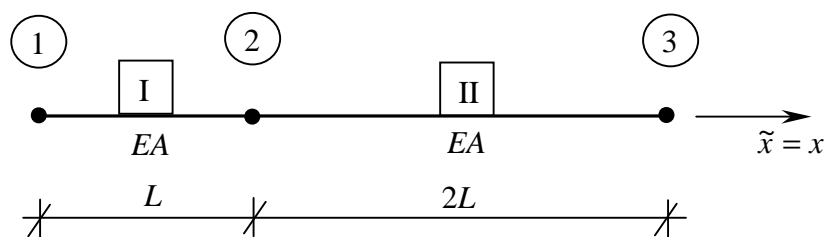
Zadanie 6.2

Wyznaczyć siły wewnętrzne dla pręta obciążonego osiowo siłą skupioną P , o schemacie statycznym przedstawionym na rysunku 6.5. Do rozwiązania zadania zastosować ujęcie macierzowe. Dane: $EA = \text{const.}$, L .



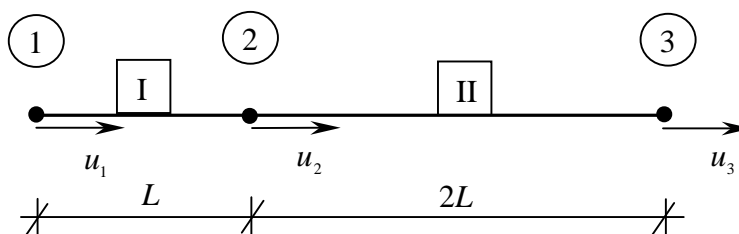
Rys. 6.5

Zadanie rozwiązujemy w sposób podobny do przedstawionego w zadaniu 6.1, w jednym układzie współrzędnych $\tilde{x} = x$. Wprowadzamy węzły w punktach charakterystycznych konstrukcji oraz dzielimy całą konstrukcję na dwa elementy (rys. 6.6):



Rys. 6.6

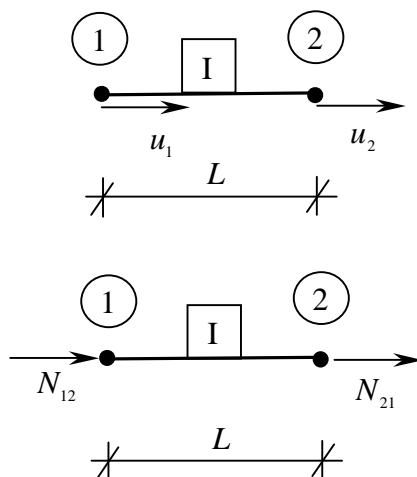
Wprowadzamy przemieszczenia węzłów w odniesieniu do całej konstrukcji, tzn.: u_1 , u_2 i u_3 . Przemieszczenia te zobrazowano na rysunku 6.7.



Rys. 6.7

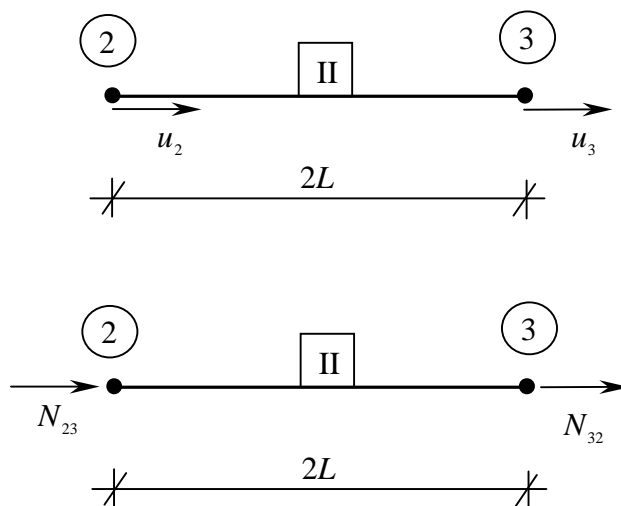
Na poziomie poszczególnych składowych elementów konstrukcji (elementu I oraz elementu II) występują przemieszczenia węzłów i stowarzyszone z nimi siły przywęzłowe.

- element pierwszy (rys. 6.8)



Rys. 6.8

- element drugi (rys. 6.9)



Rys. 6.9

Budujemy teraz macierze sztywności *elementów*. Posługujemy się wzorcową macierzą sztywności elementu prętowego opisaną zależnością (1.11). Macierz sztywności elementu pierwszego \mathbf{k}_1^p ma postać:

$$\mathbf{k}_1^p = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Macierz sztywności elementu drugiego \mathbf{k}_2^p ma postać:

$$\mathbf{k}_2^p = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Zrezygnowaliśmy z dodatkowego oznaczenia macierzy sztywności elementów za pomocą dodatkowego nadkreślenia, tzn. $\tilde{\mathbf{k}}_e^p$ dlatego że osie układów współrzędnych \tilde{x} oraz x pokrywają się.

Zbudujmy teraz układ równań dla całej konstrukcji. W ogólnej notacji macierzowej zapiszemy:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (6.12)$$

W bezpośrednim zapisie macierzowym będzie miał on postać:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

gdzie

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

jest macierzą sztywności w odniesieniu do *całej konstrukcji*,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

jest wektorem przemieszczeń węzłowych w odniesieniu do *całej konstrukcji*, a

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

jest wektorem obciążenia (prawej strony) w odniesieniu do *całej konstrukcji*.

Macierz sztywności konstrukcji \mathbf{K} stanowi odpowiednie złożenie macierzy sztywności elementów \mathbf{k}_1^p i \mathbf{k}_2^p . Na początku, wyzerujemy wszystkie elementy macierzy \mathbf{K} . Deformacją pręta pierwszego „sterują” przemieszczenia węzłów: pierwszego u_1 oraz drugiego u_2 . Dlatego macierz sztywności elementu pierwszego \mathbf{k}_1^p zajmuje w „dużej” macierzy sztywności konstrukcji następujące miejsce:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Deformacją pręta drugiego „sterują” przemieszczenia węzłów: drugiego u_2 oraz trzeciego u_3 . Dlatego macierz sztywności elementu drugiego \mathbf{k}_2^p zajmuje w „dużej” macierzy sztywności konstrukcji następujące miejsce:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

W rezultacie, po nałożeniu na siebie macierzy opisanych zależnościami (6.17) i (6.18) otrzymamy macierz sztywności konstrukcji w postaci:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Po wykonaniu sumowania elementu $K_{22} = \frac{EA}{L} + \frac{EA}{2L}$ otrzymamy:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{3EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Układ równań (6.13) przybierze teraz formę:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{3EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

Uwzględnijmy warunki brzegowe $u_1 = 0$ i $u_2 = 0$ oraz wprowadźmy rzeczywiste wartości wektora obciążenia. Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EA}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Układ równań (6.22) zapisany klasycznie ma postać:

$$1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 0$$

$$0 \cdot u_1 + \frac{3}{2} \frac{EA}{L} \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = P \quad (6.23)$$

$$0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 = 0$$

Otrzymujemy:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{2}{3} \frac{P \cdot L}{EA} \quad (6.24)$$

$$u_3 = 0$$

Wobec tego wektor przemieszczeń węzłowych konstrukcji ma postać:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \frac{P \cdot L}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Wracamy teraz na poziom elementów: pierwszego i drugiego. Wektor przemieszczeń elementu pierwszego \mathbf{u}_1 wyrażony za pomocą wektora przemieszczeń konstrukcji \mathbf{u} ma postać:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \frac{P \cdot L}{EA} \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

Wobec tego, siły przywęzłowe N_{12} i N_{21} możemy obliczyć wykorzystując równanie macierzowe:

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{k}_1^p \cdot \mathbf{u}_1 \quad (6.27)$$

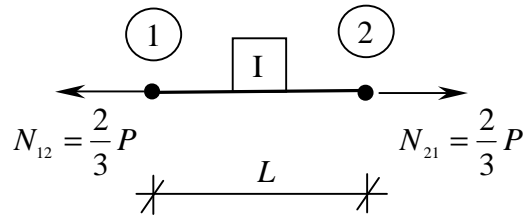
czyli:

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ N_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \frac{P \cdot L}{EA} \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 N_{12} &= \frac{EA}{L} \cdot 0 + \left(-\frac{EA}{L}\right) \cdot \frac{2P \cdot L}{3EA} = -\frac{2}{3}P \\
 N_{21} &= \left(-\frac{EA}{L}\right) \cdot 0 + \frac{EA}{L} \cdot \frac{2P \cdot L}{3EA} = \frac{2}{3}P
 \end{aligned}
 \tag{6.29}$$

Zwroty sił przywęzłowych elementu pierwszego po uwzględnieniu znaków przedstawia rysunek 6.10:



Rys. 6.10

Wektor przemieszczeń elementu drugiego \mathbf{u}_2 wyrażony za pomocą wektora przemieszczeń konstrukcji \mathbf{u} ma postać:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2P \cdot L}{3EA} \\ 0 \end{Bmatrix}
 \tag{6.30}$$

Wobec tego, siły przywęzłowe N_{23} i N_{32} możemy obliczyć wykorzystując równanie macierzowe:

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{k}_2^p \cdot \mathbf{u}_2
 \tag{6.31}$$

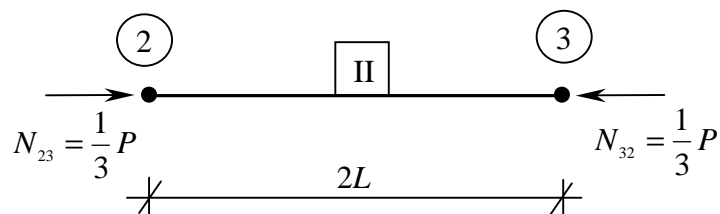
czyli:

$$\begin{Bmatrix} N_{23} \\ N_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{2P \cdot L}{3EA} \\ 0 \end{Bmatrix}
 \tag{6.32}$$

Otrzymujemy:

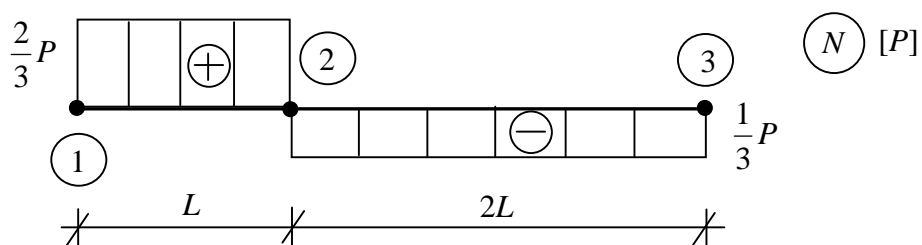
$$\begin{aligned}
 N_{23} &= \frac{EA}{2L} \cdot \frac{2P \cdot L}{3EA} + \left(-\frac{EA}{2L}\right) \cdot 0 = \frac{1}{3}P \\
 N_{32} &= \left(-\frac{EA}{2L}\right) \cdot \frac{2P \cdot L}{3EA} + \frac{EA}{2L} \cdot 0 = -\frac{1}{3}P
 \end{aligned}
 \tag{6.33}$$

Zwroty sił przywęzłowych elementu drugiego przedstawia rysunek 6.11:



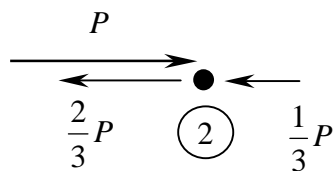
Rys. 6.11

Wykres sił normalnych przedstawia rysunek 6.12:



Rys. 6.12

Sprawdzenie warunku równowagi sił w węzle drugim przedstawia rysunek 6.13:



Rys. 6.13