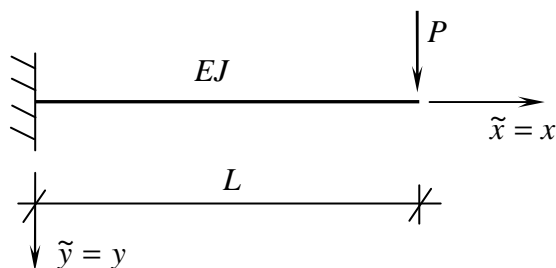


7. Statyka belek**Zadanie 7.1**

Wyznaczyć siły wewnętrzne dla belki obciążonej siłą skupioną P , o schemacie statycznym przedstawionym na rysunku 7.1. Do rozwiązania zadania zastosować ujęcie macierzowe.

Dane: $EJ = \text{const.}$, L .

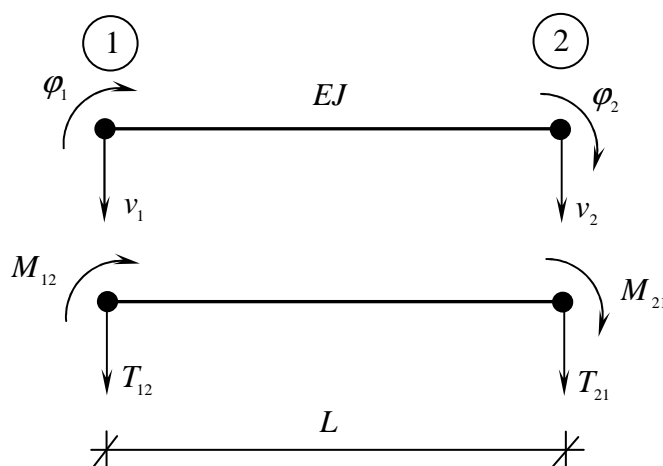


Rys. 7.1

Zadanie zostanie rozwiązane w jednym układzie współrzędnych $\tilde{x} = x$ przy zastosowaniu dwóch koncepcji: a) koncepcji najbardziej ogólnej oraz b) koncepcji uwzględniającej tzw. redukcję statyczną.

a) koncepcja ogólna

Konstrukcję traktujemy jako jeden belkowy element dwuwęzłowy (rys. 7.2):



Rys. 7.2

Układ równań wiążących przemieszczenia węzłów z siłami przywęzłowymi będzie miał postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

Układ równań (7.1) opisuje jednocześnie prace całej konstrukcji. Macierz sztywności

$$\tilde{\mathbf{k}}_e^b = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

jest osobliwa, tzn. jej wyznacznik jest równy zero. Wektor sił przywęzłowych $\tilde{\mathbf{R}}_e^b$ spełnia w tym najprostszym przykładzie jednocześnie rolę wektora obciążenia (prawej strony).

Warunek brzegowy w węźle „1” określa zerowe przemieszczenie pionowe $v_1 = 0$ oraz zerowy kąt obrotu $\varphi_1 = 0$. Wobec tego, należy tak zmodyfikować macierz sztywności i wektor prawej strony, aby ten warunek wprowadzić. Warunek taki, określa się przez wstawienie niezerowego elementu na głównej przekątnej macierzy sztywności (zwykle posługujemy się wartością jednostkową), zerowych pozostałych elementów wiersza odpowiadającego obciążeniu po kierunku odpowiednich stopni swobody, tzn.: v_1 i φ_1 oraz zerowych pozostałych elementów kolumn i symetrycznych do nich do elementów wierszy. Modyfikując wektor prawej strony, należy również wstawić elementy zerowe w wierszach odpowiadających obciążeniu po kierunku stopni swobody v_1 i φ_1 . Jednocześnie, w wierszach wektora prawej strony odpowiadających obciążeniom po kierunku stopnia swobody v_2 wstawiamy wartość siły P ze znakiem dodatnim, ponieważ siła działa zgodnie z założonym zwrotem przemieszczenia v_2 . Układ równań (7.1) przyjmie teraz formę:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

lub stosując zapis bezpośredni:

$$\begin{aligned} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot \varphi_2 &= 0 \\ 0 \cdot v_1 + 1 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot \varphi_2 &= 0 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot \varphi_1 + \frac{12EJ}{L^3} \cdot v_2 + \left(-\frac{6EJ}{L^2}\right) \cdot \varphi_2 &= P \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot \varphi_1 + \left(-\frac{6EJ}{L^2}\right) \cdot v_2 + \frac{4EJ}{L} \cdot \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Po rozwiązaniu układu równań (7.3) otrzymamy wartości przemieszczeń węzłowych:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ \varphi_1 &= 0 \\ v_2 &= \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \frac{P \cdot L^2}{EJ} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Teraz ponownie wykorzystujemy układ równań (7.1) podstawiając obliczone przemieszczenia węzłów, wyrażone relacją (7.5). Obliczamy siły przywęzłowe. Otrzymujemy:

$$\begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} \\ \frac{1}{2} \frac{P \cdot L^2}{EJ} \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

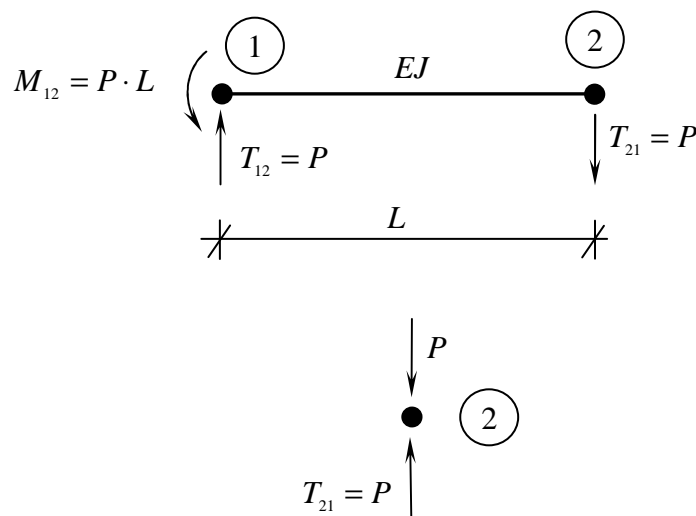
W klasycznym zapisie, układ równań (7.6) przyjmie formę:

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= \frac{12EJ}{L^3} \cdot 0 + \frac{6EJ}{L^2} \cdot 0 + \left(-\frac{12EJ}{L^3}\right) \cdot \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} + \frac{6EJ}{L^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{PL^2}{EJ} \\
 M_{12} &= \frac{6EJ}{L^2} \cdot 0 + \frac{4EJ}{L} \cdot 0 + \left(-\frac{6EJ}{L^2}\right) \cdot \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} + \frac{2EJ}{L} \cdot \frac{1}{2} \frac{PL^2}{EJ} \\
 T_{21} &= \left(-\frac{12EJ}{L^3}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{6EJ}{L^2}\right) \cdot 0 + \frac{12EJ}{L^3} \cdot \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} + \left(-\frac{6EJ}{L^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \frac{PL^2}{EJ} \\
 M_{21} &= \frac{6EJ}{L^2} \cdot 0 + \frac{2EJ}{L} \cdot 0 + \left(-\frac{6EJ}{L^2}\right) \cdot \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} + \frac{4EJ}{L} \cdot \frac{1}{2} \frac{PL^2}{EJ}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Wektor sił przywęzłowych będzie miał postać:

$$\begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -P \cdot L \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.8}$$

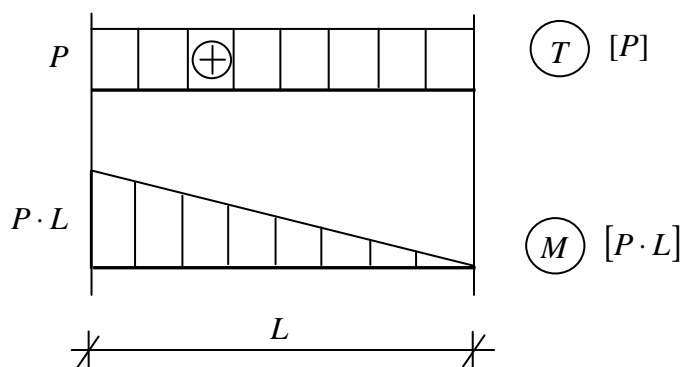
tzn. siła przywęzłowa T_{12} oraz moment przywęzłowy M_{12} zmienią swoje zwroty na przeciwne do założonych, siła przywęzłowa T_{21} będzie równa wartości obciążenia siłą P , a przywęzłowy moment zginający M_{21} będzie równy zero (rys. 7.3).



Rys. 7.3

Zauważmy, że kąt obrotu węzła drugiego, jest w tym zadaniu dodatkowym parametrem, nie wpływającym na deformację belki.

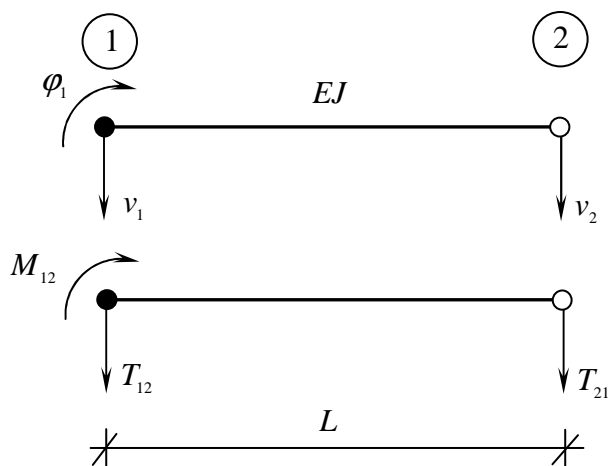
Na rysunku 7.4 przedstawiono wykresy sił przekrojowych



Rys. 7.4

b) element belkowy z przegubem na prawym końcu

Konstrukcję traktujemy jako pojedynczy, dwuwęzłowy element belkowy zakończony więzami przegubowymi na prawym końcu (rys. 7.5):



Rys. 7.5

Układ równań wiążących przemieszczenia węzłów z siłami przywęzłowymi będzie miał postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{3EJ}{L^3} & \frac{3EJ}{L^2} & -\frac{3EJ}{L^3} \\ \frac{3EJ}{L^2} & \frac{3EJ}{L} & -\frac{3EJ}{L^2} \\ -\frac{3EJ}{L^3} & -\frac{3EJ}{L^2} & \frac{3EJ}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

Wprowadzamy warunki brzegowe wraz z rzeczywistym obciążeniem konstrukcji modyfikując macierz sztywności i wektor prawej strony. Układ równań (7.9) przyjmie formę:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot J}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

a w zapisie bezpośrednim otrzymamy:

$$\begin{aligned} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot v_2 &= 0 \\ 0 \cdot v_1 + 1 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot v_2 &= 0 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot \varphi_1 + \frac{3EJ}{L^3} \cdot v_2 &= P \end{aligned} \quad (7.11)$$

Po rozwiązaniu układu równań (7.10) otrzymamy wartości przemieszczeń węzłowych:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ \varphi_1 &= 0 \\ v_2 &= \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Otrzymaliśmy tę samą wartość przemieszczenia pionowego węzła drugiego. Teraz ponownie wykorzystujemy układ równań (7.9) podstawiając obliczone przemieszczenia węzłów, wyrażone relacją (7.12). Obliczamy siły przywęzłowe. Otrzymujemy:

$$\begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{L^3} & \frac{3EJ}{L^2} & -\frac{3EJ}{L^3} \\ \frac{3EJ}{L^2} & \frac{3EJ}{L} & -\frac{3EJ}{L^2} \\ -\frac{3EJ}{L^3} & -\frac{3EJ}{L^2} & \frac{3EJ}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

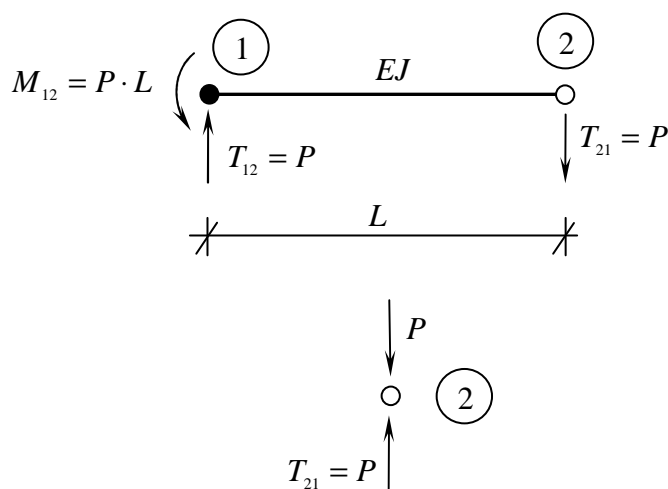
W klasycznym zapisie, układ równań (7.13) przyjmie formę:

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{3EJ}{L^3} \cdot 0 + \frac{3EJ}{L^2} \cdot 0 + \left(-\frac{3EJ}{L^3}\right) \cdot \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} \\ M_{12} &= \frac{3EJ}{L^2} \cdot 0 + \frac{3EJ}{L} \cdot 0 + \left(-\frac{3EJ}{L^2}\right) \cdot \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} \\ T_{21} &= \left(-\frac{3EJ}{L^3}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{3EJ}{L^2}\right) \cdot 0 + \frac{3EJ}{L^3} \cdot \frac{1}{3} \frac{P \cdot L^3}{EJ} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Wektor sił przywęzłowych będzie miał postać:

$$\begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -P \cdot L \\ P \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

tzn. siła przywęzłowa T_{12} oraz moment przywęzłowy M_{12} zmienią swoje zwroty na przeciwne do założonych, siła przywęzłowa T_{21} będzie równa wartości obciążenia siłą P (rys. 7.6).



Rys. 7.6

Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rysunku 7.4.