5. Układy równań liniowych

5.1. Wzory Cramera

Niech będzie dany układ *n* równań liniowych, w którym liczba równań równa jest liczbie niewiadomych:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots + a_{3n}\cdot x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases} \tag{99}$$

Układ równań (99) możemy zapisać w notacji macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{100}$$

lub inaczej

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{101}$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{102}$$

jest macierzą kwadratową współczynników,

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{103}$$

jest jednokolumnową macierzą grupującą niewiadome, oraz

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{104}$$

jest jednokolumnową macierzą wyrazów wolnych.

Układowi równań (70) przyporządkowane jest również $n+1$ wyznaczników. Wyznacznik główny:

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{105}$$

oraz wyznaczniki powstałe przez zastąpienie odpowiedniej kolumny w wyznaczniku głównym *W*, kolumną składającą się z wyrazów wolnych:

$$W_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{106}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{107}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{108}$$

....

$$W_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix} \tag{109}$$

Jeżeli wyznacznik główny *W* jest różny od zera, to układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie opisane wzorami [*, **]:

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \quad x_3 = \frac{W_3}{W}, \ ...., \ x_n = \frac{W_n}{W} \tag{110}$$

Wzory opisane zależnościami (110) noszą nazwę wzorów Cramera. Układ równań (99), przy założeniu, że jego wyznacznik główny jest różny od zera, nazywa się układem Cramera.

Jeżeli wyznacznik główny *W* układu równań (99) jest równy zero i co najmniej jeden z wyznaczników W_i jest różny od zera, gdzie $i = 1,...,n$, to układ równań (99) jest sprzeczny.

Jeżeli wyznacznik główny *W* układu równań (99) jest równy zero i każdy z wyznaczników W_i jest równy zero, gdzie $i = 1,...,n$, to układ równań (99) jest nieoznaczony lub sprzeczny.

[*] R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej dla inżynierów, część I*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1977

[**] dr Maria Sielska, dr Ryszard Sielski, *Wykłady i ćwiczenia z matematyki dla kierunku budownictwo, semestr I* - opracowanie autorskie: M. Guminiak, Politechnika Łódzka, rok akademicki 1994/1995

5.2. Wykorzystanie macierzy odwrotnej

Układ n równań liniowych o n niewiadomych (99), przy założeniu, ze jego wyznacznik główny jest różny od zera, można rozwiązać wykorzystując macierz odwrotną macierzy **A**. Układ równań (99) zapisany w symbolicznej postaci macierzowej ma formę (101). Zapiszmy:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{111}$$

Jeżeli pomnożymy lewostronnie elementy równania (101) otrzymamy:

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b} \tag{112}$$

Wykonanie działania $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ prowadzi do macierzy jednostkowej, wobec czego otrzymamy:

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b} \tag{113}$$

czyli

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b} \tag{114}$$

Układ równań (114) można zapisać jako:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{115}$$

gdzie $\tilde{a}_{ik}$ $\left(i=1...n,\ k=1...n\right)$ jest elementem macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$.

5.3. Metoda eliminacji Gaussa

Rozważamy układ równań zapisany wcześniej zależnością (99):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{116}$$

Niech wszystkie elementy zgrupowane na głównej przekątnej macierzy A będą różne od zera. Podzielmy wszystkie elementy pierwszego wiersza macierzy **A** oraz element b_1 macierzy kolumnowej **b** przez element a_{11}. Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{117}$$

Oznaczmy nowe elementy pierwszego wiersza macierzy **A** jako c_{ik}, a element $\frac{b_1}{a_{11}} = d_1$.

Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{118}$$

W następnym kroku należy tak przekształcać układ równań (118) aby w pierwszej kolumnie macierzy **A** elementy od a_{21} do a_{n1} przyjęty wartość zerową. Aby otrzymać zerowy element a_{21} odejmujemy od wiersza drugiego wiersz pierwszy, pomnożony przez aktualny element a_{21}. Podobnie postępujemy z wektorem wyrazów wolnych **b**, odejmujemy od aktualnego elementu b_2 element b_1 pomnożony przez a_{21}. Układ równań (118) przybierze formę:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & a_{22}-c_{12}\cdot a_{21} & a_{23}-c_{13}\cdot a_{21} & \dots & a_{2n}-c_{1n}\cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ b_2 - d_1\cdot a_{21} \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (119)$$

Wprowadźmy nowe oznaczenia elementów drugiego wiersza przekształcanych macierzy **A** i wektora **b**. Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & e_{22} & e_{23} & \dots & e_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (120)$$

Następnie wykonujemy podobną operację tak, aby uzyskać nowy, zerowy element a_{31}. Odejmujemy od wiersza trzeciego macierzy **A**, wiersz pierwszy, pomnożony przez element a_{31}. Modyfikacji ulegnie również element b_2 wektora wyrazów wolnych **b**. Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & e_{22} & e_{23} & \dots & e_{2n} \\ 0 & a_{32}-c_{12}\cdot a_{31} & a_{33}-c_{13}\cdot a_{31} & \dots & a_{3n}-c_{1n}\cdot a_{31} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ b_3 - d_1\cdot a_{31} \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (121)$$

Po wprowadzeniu nowych oznaczeń układ równań (121) przyjmie formę:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1n} \\ 0 & e_{22} & e_{23} & ... & e_{2n} \\ 0 & e_{32} & e_{33} & ... & e_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{122}$$

Dalej postępujemy analogicznie odnośnie wiersza czwartego aż do wiersza *n*-tego macierzy **A** i wektora **b**. Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1n} \\ 0 & e_{22} & e_{23} & ... & e_{2n} \\ 0 & e_{32} & e_{33} & ... & e_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & e_{n2} & e_{n3} & ... & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ d_n \end{Bmatrix} \tag{123}$$

W dalszej części przekształceń dążymy do tego, aby otrzymać nowy element e_{22} równy jedności. Dzielimy wiersz drugi macierzy A i wektora b przez wartość aktualnego elementu e_{22}. Otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dfrac{e_{23}}{e_{22}} & ... & \dfrac{e_{2n}}{e_{22}} \\ 0 & e_{32} & e_{33} & ... & e_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & e_{n2} & e_{n3} & ... & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \dfrac{d_2}{e_{22}} \\ d_3 \\ ... \\ d_n \end{Bmatrix} \tag{123}$$

a po wprowadzeniu nowych oznaczeń układ równań (123) przyjmie formę:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ 0 & e_{32} & e_{33} & \dots & e_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ g_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} \tag{124}$$

W następnym kroku dążymy do tego, aby otrzymać nowy element e_{32} równy zero. Odejmujemy od wiersza trzeciego macierzy **A** wiersz drugi pomnożony przez wartość e_{32}. Podobną operację wykonujemy w odniesieniu do wektora **b**. Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ 0 & 0 & e_{33} - f_{23} \cdot e_{32} & \dots & e_{3n} - f_{2n} \cdot e_{32} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ g_2 \\ d_3 - g_2 \cdot e_{32} \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} \tag{125}$$

Po wprowadzeniu nowych oznaczeń, układ równań (125) można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ 0 & 0 & h_{33} & \dots & h_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ g_2 \\ k_3 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} \tag{126}$$

W rezultacie, operacje opisane powyżej powtarzamy do momentu otrzymania układu równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & f_{23} & \ldots & f_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & p_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ g_2 \\ q_3 \\ \ldots \\ r_n \end{Bmatrix} \tag{127}$$

Układ równań algebraicznych opisany równaniem (127) możemy zaczynając od ostatniego, $n-$tego równania, gdzie niewiadomą jest x_n. Równanie to ma postać:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 1 \cdot x_n = r_n \tag{128}$$

czyli:

$$x_n = r_n \tag{129}$$

Następnie podstawiamy tak obliczoną wartość $x_n = r_n$ do równania $n-1$ i obliczmy niewiadomą x_{n-1}:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 1 \cdot x_{n-1} + p_{(n-1)n} \cdot r_n = r_{n-1} \tag{130}$$

czyli:

$$x_{n-1} = r_{n-1} - p_{(n-1)n} \cdot r_n \tag{131}$$

Procedurę opisaną powyżej powtarzamy w sposób analogiczny obliczając kolejno niewiadome x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4},..., aż do obliczenia niewiadomej x_1. Procedurę tę można stosować wyłącznie wtedy, gdy podczas wszystkich kolejnych kroków otrzymujemy niezerowe elementy na głównej przekątnej macierzy **A**. Jeżeli w toku przeprowadzanych obliczeń otrzymamy kolejny element leżący na głównej przekątnej równy zeru, opisana metoda będzie wymagała modyfikacji. Modyfikacja ta nosi nazwę *wyboru elementu głównego*. Opis tej modyfikacji zamieszczony poniżej wykonano na kanwie części materiałów dydaktycznych opracowanych przez dr. hab. Piotra A. Dybczyńskiego [***].

[***] dr hab. Piotr Andrzej Dybczyński**,** Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu**.** *Materiały dydaktyczne dla studentów*. Strona internetowa: http://apollo.astro.amu.edu.pl/PAD/index.php?n=Dybol.DydaktykaEliminacjaGaussa

5.3.1. Wybór elementu głównego

Niech układ równań algebraicznych ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & e_{23} & \dots & e_{2n} \\ 0 & e_{32} & e_{33} & \dots & e_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} \tag{132}$$

Zauważmy, że element e_{22} jest równy zeru. Spośród elementów drugiej kolumny należy znaleźć przynajmniej jeden niezerowy element leżący poniżej głównej przekątnej. Niech będzie to element e_{32}. Należy teraz zamienić miejscami wiersz trzeci z wierszem drugim. Zmianie ulegnie również położenie niewiadomych w wektorze **x** oraz wyrazów wolnych w wektorze **b**. Po wprowadzeniu nowych oznaczeń otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ 0 & 0 & f_{33} & \dots & f_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} \tag{133}$$

gdzie:

$$f_{22} = e_{32},\ f_{23} = e_{33},\ \dots,\ f_{2n} = e_{3n} \ \text{ i } \ g_2 = d_3,$$

$$f_{33} = e_{23},\ \dots,\ f_{3n} = e_{2n} \ \text{ i } \ g_3 = d_2,$$

$$y_2 = x_3 \ \text{ i } \ y_3 = x_2.$$

Dokładność otrzymanego rozwiązania można zwiększyć wyszukując każdorazowo spośród elementów znajdujących się poniżej głównej przekątnej elementu o największej wartości bezwzględnej.

Jeżeli wszystkie elementy znajdujące się na głównej przekątnej oraz leżące poniżej głównej przekątnej są zerami, to układ równań nie posiada jednoznacznego rozwiązania lub jest sprzeczny. W analizie konstrukcji w ujęciu macierzowym otrzymujemy macierz sztywności konstrukcji (odpowiednikiem tej macierzy jest macierz **A**), o wszystkich niezerowych elementach znajdujących się na jej głównej przekątnej.

Metoda eliminacji Gaussa jest stosowana powszechnie w procedurach numerycznych za pomocą których rozwiązywane są układy równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych. Jej wielką zaletą jest względna prostota wykonywanych operacji matematycznych, podczas których nie tracimy na dokładności obliczeń.