Zagadnienie geometrycznie nieliniowe - duże przemieszczenia

W przypadku dużych lub umiarkowanie dużych przemieszczeń równania równowagi należy formułować w przemieszczeniach konfiguracji, która jest aktualnie nieznana i którą trzeba wyznaczyć. Jest to podstawowa cecha nieliniowości geometrycznej.

Dużym przemieszczeniom mogą towarzyszyć małe lub duże odkształcenia. W pierwszym przypadku zależność między przemieszczeniem a odkształceniem jest nieliniowa, w drugim zależność ta również jest nieliniowa. Stan naprężenia określany jest na konfiguracji zdeformowanej. Rozróżnienie wielkości przemieszczeń i odkształceń jako dużych lub małych jest umowne i nie posiada ścisłego kryterium. W teorii liniowej korzysta się ze składowych całkowitego przemieszczenia i składowych całkowitego naprężenia i odkształcenia w punkcie obliczanych bezpośrednio od danego obciążenia. W zagadnieniach nieliniowych geometrycznie obciążenie rośnie aż do końcowej wartości i wyznacza przyrostowe zmiany naprężenia i odkształcenia [1].

1. Opis stanu odkształcenia

1.1. Współrzędne materialne i współrzędne przestrzenne

Do opisu stanu odkształcenia kontinuum materialnego wprowadza się dwa układy współrzędnych :

O X_1 X_2 X_3 – stały nieruchomy w czasie, kartezjański,

o x_1 x_2 x_3 - konwekcyjny, współobrotowy, odpowiadający uśrednionemu obrotowi ciała przy przejściu z jednej konfiguracji do drugiej, sztywno związany z bryłą, kartezjański.

Wprowadzanie dwóch różnych układów współrzędnych ma znaczenie tylko w teorii nieliniowej. Jeśli stan przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia odnosi się do układu X_i, tzn. $u = u\ (X_i)$, $\varepsilon = \varepsilon\ (X_i)$, $\sigma = \sigma\ (X_i)$, to opisuje się zagadnienie wg. Lagrange'a we współrzędnych materialnych. Jeśli $u = u\ (x_i)$, $\varepsilon = \varepsilon\ (x_i)$, $\sigma = \sigma\ (x_i)$, wtedy opisuje się zagadnienie wg. Eulera we współrzędnych przestrzennych. Stan przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w danym punkcie jest obiektywny i nie zależy od wyboru układu współrzędnych. W teorii dużych przemieszczeń oba opisy mają zastosowanie [1].

Wprowadza się oznaczenia:

X – wektor wodzący punktu materialnego P(X_i) w konfiguracji początkowej

x - wektor wodzący punktu materialnego P(X_i) w konfiguracji zdeformowanej

u - wektor wodzący przy przejściu ciała ze stanu początkowego do zdeformowanego

Wektory **X** i **x** można zapisać dokonując rozkładu:

[1] M. Kmiecik, M. Wizmur, E. Bielewicz: *Analiza nieliniowa tarcz i płyt*, Politechnika Gdańska 1995

$\mathbf{X} = X_1\mathbf{I}_1 + X_2\mathbf{I}_2 + X_3\mathbf{I}_3 = X_K\mathbf{I}_K$, (współrzędne materialne)

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_k e_k$, (współrzędne przestrzenne)

Wzajemna orientacja obu układów współrzędnych jest określona wektorem **b** oraz kosinusami kierunkowymi między osiami układów, które są iloczynami skalarnymi wersorów obu układów

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{I}_K = \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{e}_k = n_{kK} = n_{Kk} \tag{1.1}$$

Wektor przemieszczenia **u** można rozłożyć w obu układach

$$\mathbf{U} = U_K\mathbf{I}_K\,, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u} = u_k\mathbf{e}_k\,, \tag{1.3}$$

po wymnożeniu skalarnym równości (1.1) przez $\mathbf{I}_K$ otrzymuje się

$$\mathbf{e}_k = n_{kK}\mathbf{I}_K\,, \tag{1.4}$$

oraz $\mathbf{U} = \mathbf{u}$, stąd

$$\mathbf{u} = u_k n_{kK}\mathbf{I}_K\,, \tag{1.5}$$

otrzymuje się prawo transformacji współrzędnych wektora przemieszczenia z układu współrzędnych przestrzennych do układu współrzędnych materialnych

$$U_K = n_{kK}u_k\,. \tag{1.6}$$

Punkty materialne ciała doznającego narastającej deformacji poruszają się po torach będących ciągiem punktów w przestrzeni o współrzędnych X_i lub x_k (i=k=1,2,3) [1]. Dlatego ruch może być opisany na dwa sposoby, za pomocą wektora wodzącego punktu materialnego **X** lub **x**. Pierwszy sposób opisuje ruch punktu za pomocą wektora $x_i = x_i(\mathbf{X},t)$. Wektor wodzący **x** punktu P w konfiguracji odkształconej jest funkcją wektora **X**. Mówi się wtedy o opisie stacjonarnym Lagrange'a. Drugi sposób, to opis ruchu punktu za pomocą wektora $\mathbf{X} = X_i(\mathbf{x},t)$. Mówi się wtedy o opisie Eulera. Wzajemne zależności między współrzędnymi obu układów są funkcjami wzajemnie jednoznacznymi i różniczkowalnymi dowolną liczbę razy. Warunkiem koniecznym i dostatecznym tego postulatu jest aby wyznacznik $\det(x_{k,K})$ był różny od zera:

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \det(x_{k,K}) \neq 0\,.$$

Do opisu deformacji ciała w układach współrzędnych materialnym i przestrzennym wprowadza się pojęcie gradientów deformacji i przemieszczenia. Materialnym gradientem deformacji nazywa się tensor o walencji dwa:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} e_i \otimes I_K\,, \tag{1.7}$$

[1] M. Kmiecik, M. Wizmur, E. Bielewicz: *Analiza nieliniowa tarcz i płyt*, Politechnika Gdańska 1995

Reprezentacją macierzową tego tensora jest

$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} = x_{i,K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

Zależnością odwrotną jest przestrzenny gradient deformacji

$$\mathbf{H} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} I_K \otimes e_i \,, \tag{1.9}$$

którego reprezentacją macierzową jest

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Macierze F_{iK} i H_{Ki} związane są relacją

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_J} \cdot \frac{\partial X_J}{\partial x_k} = \delta_{iK} \,, \tag{1.11}$$

co pozwala zapisać

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-1} . \tag{1.12}$$

Materialny gradient przemieszczenia **Y**

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial U_I}{\partial X_K} I_I \otimes I_K \,, \tag{1.13}$$

stosując zapis wskaźnikowy

$$Y_{IK} = U_{I,K} \,, \tag{1.14}$$

Przestrzenny gradient przemieszczenia

$$\mathbf{K} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \,, \tag{1.15}$$

w zapisie wskaźnikowym

$$K_{ik} = u_{i,k} \,, \tag{1.16}$$

Różniczkując równanie **u** = **x** – **X** względem współrzędnych materialnych otrzymuje się

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{I}_K - \delta_{IK} \mathbf{I}_I \otimes \mathbf{I}_K = \mathbf{F} - \mathbf{I} \,, \tag{1.17}$$

gdzie **I** jest tensorem metrycznym o reprezentacji macierzowej jako macierz jednostkowa i może być opisany deltą Kroneckera. Różniczkowanie równania **u** = **x** – **X** względem współrzędnych przestrzennych prowadzi do wyniku

$$\mathbf{K} = \delta_{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k - \frac{\partial X_I}{\partial x_k}\mathbf{I_I} \otimes e_k = \mathbf{I} - \mathbf{H}\,. \tag{1.18}$$

1.2 Miary odkształcenia

Przyjęto pokrywające się układy współrzędnych [1]. Można wtedy stosować jednolite wskaźniki. Definiuje się kwadrat długości wektora $d\mathbf{X}$

$$(d\mathbf{X})^2 = d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j\,, \tag{1.19}$$

różniczka zupełna i-tej współrzędnej wynosi

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j\,, \tag{1.20}$$

po rozpisaniu

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_{1,1}dx_1 + X_{1,2}dx_2 + X_{1,3}dx_3 \\ dX_2 &= X_{2,1}dx_1 + X_{2,2}dx_2 + X_{2,3}dx_3\,, \\ dX_3 &= X_{3,1}dx_1 + X_{3,2}dx_2 + X_{3,3}dx_3 \end{aligned} \tag{1.21}$$

lub

$$d\mathbf{X} = \mathbf{H}dx, \tag{1.22}$$

Kwadrat długości $(d\mathbf{X})^2$ można przedstawić także jako iloczyn zależności (1.20) przez siebie:

$$(d\mathbf{X})^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}\frac{\partial X_k}{\partial x_i} dx_j dx_i\,, \tag{1.23}$$

gdzie $C_{ij} = \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial X_k}{\partial x_j}$ oraz

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^T\mathbf{H}\,, \tag{1.24}$$

Zależność (2.24) jest definicją tensora deformacji Cauchy'ego.

Kwadrat długości w konfiguracji zdeformowanej $(d\mathbf{x})^2$ wynosi

$$(d\mathbf{x})^2 = d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = \delta_{ij} dx_i dx_j\,, \tag{1.25}$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j\,, \tag{1.26}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}, \tag{1.27}$$

[1] M. Kmiecik, M. Wizmur, E. Bielewicz: *Analiza nieliniowa tarcz i płyt*, Politechnika Gdańska 1995

$$(d\mathbf{x})^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j \,, \tag{1.28}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad \text{lub inaczej} \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \,. \tag{1.29}$$

Różnica kwadratów $(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2$ jest równa:

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) dX_i dX_j \,, \tag{1.30}$$

jeśli wprowadzimy oznaczenie:

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right), \tag{1.31}$$

to

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 = 2L_{ij} dX_i dX_j = d\mathbf{X}^T 2\mathbf{L} d\mathbf{X} \,. \tag{1.32}$$

Tensor $\mathbf{L}$ o składowych L_{ij} przy wprowadzeniu materialnego gradientu deformacji przyjmie postać:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G} - \mathbf{I}\right), \tag{1.33}$$

i nazywa się tensorem odkształceń skończonych Lagrange'a – Greena. Różnicę kwadratów można wyrazić również przez związki (1.23) i (1.25)

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j \,, \tag{1.34}$$

oznaczając

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j \,, \tag{1.35}$$

otrzymuje się zależność:

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 = 2E_{ij} dx_i dx_j = d\mathbf{x}^{\mathbf{T}} 2\mathbf{E} d\mathbf{x} \,. \tag{1.36}$$

Tensor $\mathbf{E}$ o składowych E_{ij} przy wprowadzeniu przestrzennego gradientu deformacji opisany jest zależnością

$$E = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{H}^T\mathbf{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{C}\right), \tag{1.37}$$

i nazywa się tensorem odkształceń skończonych Eulera – Almansiego. Odnosi on zmianę długości rozpatrywanego odcinka PQ do układu związanego z ciałem.

Z zależności $x_k = u_k - X_k$ otrzymuje się równość:

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_i} = \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ki}\,, \tag{1.38}$$

a po podstawieniu do (1.35) otrzymamy:

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\delta_{ki} + \delta_{ki}\delta_{kj} - \delta_{ij} \right), \tag{1.39}$$

oraz $\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\delta_{kj} = \frac{\partial u_j}{\partial X_i}$, $\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\delta_{ki} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ i $\delta_{kj} = \delta_{ki}$,

stąd

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i}U_{k,j}\right)\,, \tag{1.40}$$

Różniczkując zależność $X_k = x_k - u_k$ po „x_i" i „x_j" otrzymuje się relacje

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad \text{stąd}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}\right), \tag{1.41}$$

lub zapisane inaczej

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T + \mathbf{K}^T\mathbf{K}\right), \tag{1.42}$$

W mechanice nieliniowe dokonuje się rozkładu tensorów odkształceń skończonych na część liniową i nieliniową. Składowe tensorów tworzą sumę:

$$L_{ij} = l_{ij} + \eta_{ij}\,, \tag{1.43}$$

$$E_{ij} = e_{ij} + \overline{\eta}_{ij}\,, \tag{1.44}$$

1.3 Opis stanu naprężenia

Opis stanu naprężenia prowadzony jest w konfiguracji zdeformowanej ciała [1]. Na elementarną powierzchnię *da* otaczającą punkt P, zorientowaną jednostkowym wektorem normalnej zewnętrznej $\mathbf{n} = n_i e_i$ działa elementarna siła kontaktowa $d\mathbf{f} = df_i e_i$, to

$$\mathbf{t}^{(n)} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a}\,, \tag{1.45}$$

jest naprężeniem Cauchy'ego w punkcie P(x_1, x_2, x_3). Przez punkt P można poprowadzić nieskończenie wiele przekrojów i na każdym z nich określić elementarną powierzchnię *da* oraz

[1] M. Kmiecik, M. Wizmur, E. Bielewicz: *Analiza nieliniowa tarcz i płyt*, Politechnika Gdańska 1995

określić wektor $\mathbf{t}^{(n)}$. Zbiór wszystkich par (**t**, **n**) definiuje stan naprężenia w punkcie P. Wystarczy wybrać trzy wzajemnie prostopadłe przekroje aby zdefiniować jednoznacznie stan naprężenia w punkcie P. Stan naprężenia w punkcie można zdefiniować przez wprowadzenie tensora naprężenia Cauchy'ego σ_{ij}. W teorii dużych przemieszczeń istotny jest dobór konfiguracji ciała. Stan naprężenia w punkcie określany jest na nieznanej konfiguracji ciała po deformacji. Należy wtedy odnieść stan naprężenia w konfiguracji zdeformowanej do konfiguracji początkowej, która jest znana. Rozważa się powierzchnię dA w konfiguracji początkowej C^0, która w wyniku deformacji przechodzi w da. Jednostkowy wektor **N** staje się w konfiguracji C^1 wektorem **n**. Wprowadza się siły kontaktowe:

$$\mathbf{T}^{(N)} dA = \mathbf{t}^{(n)} da\,, \tag{1.46}$$

Między polami dA i da zachodzi związek

$$\mathbf{n} da = J\mathbf{H}^T \mathbf{N} dA\,, \tag{1.47}$$

gdzie $J = \det \mathbf{F}$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{T}\mathbf{n} = \sigma_{ij} n_j e_i\,, \tag{1.48}$$

Tensor naprężenia w konfiguracji początkowej C^0 I tensor Pioli-Kirchhoffa

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{N})} = \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{N} = t_{ij}^{(1)} N_j I_I\,, \tag{1.49}$$

Po podstawieniu (1.48) i (1.49) do (1.46) i wykorzystaniu zależności (1.47) można określić związek między I tensorem Pioli-Kirchhoffa a tensorem Cauchy'ego

$$\mathbf{T}^{(1)} = J\mathbf{T}\mathbf{H}^T\,, \tag{1.50}$$

zapisany inaczej

$$t_{ij}^{(1)} = JH_{jk}\sigma_{ki}\,, \tag{1.51}$$

Pierwszy tensor Pioli-Kirchhoffa jest obiektem niesymetrycznym z uwagi na niesymetryczność przestrzennego gradientu deformacji **H**. Można zdefiniować zależność odwrotną

$$\sigma_{ij} = J^{-1} F_{ik} t_{jk}^{(1)}\,, \tag{1.52}$$

Pochodna tensora naprężenia Cauchy'ego obliczana w konfiguracji zdeformowanej przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = J^{-1}\frac{\partial}{\partial X_j} t_{ij}^{(1)}\,, \tag{1.53}$$

Różniczkowanie tensora $t_{ij}^{(1)}$ odbywa się w konfiguracji początkowej C^0. Równania równowagi można zapisywać w konfiguracji początkowej C^0

$$t_{ij,j}^{(1)} + \rho^0 F_i = 0\,, \tag{1.54}$$

gdzie $\rho^1 = \rho^0 J^{-1}$.

W teorii dużych deformacji ma zastosowanie również II tensor Pioli-Kirchoffa, który jest opisany zależnością

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{HTH}^T, \tag{1.55}$$

lub inaczej

$$t_{ij}^{(2)} = JH_{ik}\sigma_{kl}H_{lj}, \tag{1.56}$$

II tensor Pioli-Kirchhoffa występuje w równaniu pracy wirtualnej zapisanemu w konfiguracji zdeformowanej, która jest przeniesiona do konfiguracji początkowej

$$\int_{V^{(1)}} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV^{(1)} = \int_{V^{(0)}} t_{ij}^{(2)}\delta L_{ij}dV^{(0)}, \tag{1.57}$$

I i II tensor Pioli-Kirchhoffa związane są zależnością

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{FT}^{(2)}, \tag{1.58}$$

lub inaczej

$$t_{ij}^{(1)} = F_{ik}t_{kj}^{(2)}, \tag{1.59}$$

gdzie

$$F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik}, \tag{1.60}$$

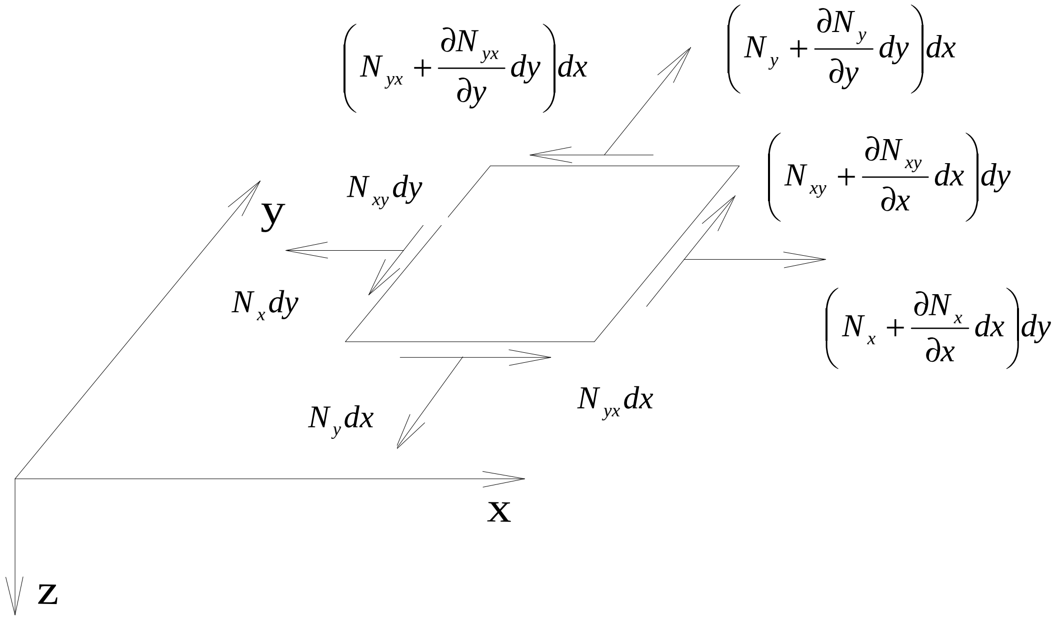
2. Zginanie płyt cienkich

2.1. Analiza geometrycznie nieliniowa

Przy dużych deformacjach punkty płaszczyzny środkowej doznają przemieszczeń *w*, *u* oraz *v*, gdzie przemieszczenia *u* i *v* wywołane są stanem tarczowym. Przemieszczeniom tym odpowiadają naprężenia równomiernie rozłożone po grubości płyty σ_x, σ_y *i* τ_{xy}. Siły przekrojowe opisujące stan tarczowy:

$$\begin{aligned} N_x &= \sigma_x \cdot t, \\ N_y &= \sigma_y \cdot t, \\ N_{xy} &= \tau_{xy} \cdot t, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Miarą dużego przemieszczenia może być grubość płyty *t*. Rozważa się umiarkowanie duże przemieszczenia. Na stan sił w płycie o dużych przemieszczeniach składają się M_x, M_y, M_{xy} oraz N_x, N_y *i* N_{xy}. Siły tarczowe mogą być rezultatem obciążenia zewnętrznego stycznego przyłożonego wzdłuż kierunków osi x i y lub wynikiem ugięć większych niż 10 do 20 % grubości płyty. Wartości tych sił rosną w miarę narastania ugięć płyty [1].



Rys. 2.1

Po zsumowaniu rzutu sił N_x na kierunek osi z

$$-N_x \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \partial y + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} dx \right), \qquad (2.2)$$

Po pominięciu wartości wyższego rzędu otrzymuje się składowe pionowe sił tarczowych $N_x \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2}$, $N_y \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2}$ oraz $2N_{xy} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y}$. Zakłada się, że $N_{xy} = N_{yx}$. Składowe pionowe sił membranowych dodaje się do prawej strony równania płyty

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p_z + N_x \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y}, \qquad (2.3)$$

gdzie D jest sztywnością płyty $D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$, p_z jest obciążeniem rozłożonym po powierzchni płyty na kierunku osi z. Zakłada się, że istnieje funkcja $F(x, y)$ taka, że

$$\sigma_x^m = \frac{N_x}{t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$\sigma_y^m = \frac{N_y}{t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad (2.4)$$

[1] M. Kmiecik, M. Wizmur, E. Bielewicz: *Analiza nieliniowa tarcz i płyt*, Politechnika Gdańska 1995

$$\tau_{xy}^{m}=\frac{N_{xy}}{t}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},$$

wtedy

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p_z+$$

$$+t\left(\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right), \tag{2.5}$$

W równaniu (2.5) są dwie niewiadome: funkcja ugięcia w i funkcja naprężeń F. Wykorzystuje się związek nierozdzielności odkształceń dla płaszczyzny środkowej płyty

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}=0, \tag{2.6}$$

do którego należy podstawić składowe tensora odkształceń Lagrange'a. W przypadku dużych ugięć płyty długość elementarnego odcinka powierzchni środkowej w płaszczyźnie $x-z$ wynosi

$$ds_0=dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2}\approx dx\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right), \tag{2.7}$$

po ugięciu

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\right)^2}\approx dx\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\right)^2\right), \tag{2.8}$$

część nieliniowa tensora odkształcenia w płaszczyźnie $x-z$

$$\eta_x=\frac{ds-ds_0}{ds_0}=\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\eta_y=\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \tag{2.9}$$

$$\eta_{xy}=\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$

stąd

$$L_x=l_x+\eta_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$L_y=l_y+\eta_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \tag{2.10}$$

$$2L_{xy}=l_{xy}+\eta_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$

W płaszczyźnie środkowej płyty odkształcenia te wywołane są tylko siłami tarczowymi

$$
\begin{aligned}
L_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x^m - \nu\sigma_y^m\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right), \\
L_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y^m - \nu\sigma_x^m\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \\
2L_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}^m = -\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Wprowadzenie związków (2.10) i (2.11) do równania nierozdzielności odkształceń (2.6) prowadzi do zależności

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right) = \\
&= E\left\{\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Zależności (2.5) i (2.12) są równaniami nieliniowej teorii dużych ugięć płyt w zakresie sprężystym materiału. Ścisłe rozwiązania ogólne tych równań nie istnieją. Gdy ugięcia płyty są małe równania (2.5) i (2.12) rozprzęgają się stając się niezależnymi. Związek (2.12) przechodzi w równanie biharmoniczne tarczy a (2.5) staje się klasycznym równaniem płyty cienkiej.

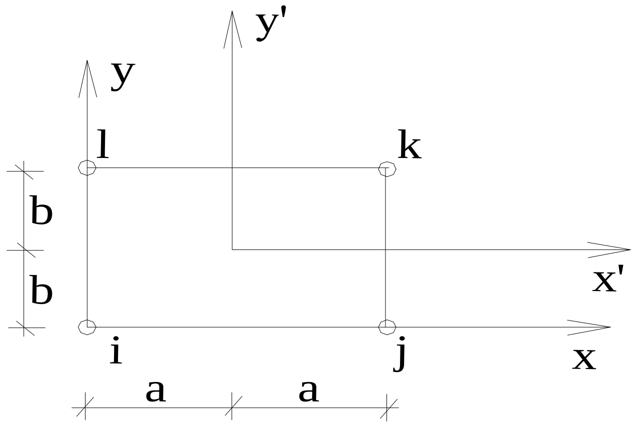
2.2 Zastosowanie metody elementów skończonych

Do analizy numerycznej wykorzystano prostokątny element powierzchniowy (płytowo--tarczowy) o pięciu stopniach swobody w węźle. Element powłokowy jest złożeniem elementu tarczowego czterowęzłowego o dwóch stopniach swobody w węźle z elementem płytowym o trzech stopniach swobody w węźle.

2.3 Opis prostokątnego czterowęzłowego elementu tarczowego

Pole przemieszczeń wewnątrz elementu może być aproksymowane za pomocą wielomianów:

$$
\begin{aligned}
u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\
v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$



Rys. 2.2

W zapisie macierzowym

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_8 \end{Bmatrix} = \mathbf{Pa}, \tag{2.14}$$

Po podstawieniu do związków (2.13) znanych współrzędnych węzłów (i-tego węzła, i=1,2,3,4)

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 x_i y_i$$

$$v_i = a_5 + a_6 x_i + a_7 y_i + a_8 x_i y_i \ , \tag{2.15}$$

w zapisie macierzowym

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ca}, \tag{2.16}$$

można obliczyć nieznane współczynniki a_i

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}\ , \tag{2.17}$$

gdzie **r** jest wektorem stopni swobody węzłów (przemieszczeń węzłowych). Stąd

$$\mathbf{u} = \mathbf{Pa} = \mathbf{PC}^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{Nr}\ , \tag{2.18}$$

N jest macierzą funkcji kształtu opisujących pole przemieszczeń wewnątrz elementu w funkcji przemieszczeń węzłów. Funkcje kształtu są postaci

$$N_i = \left(1 - \frac{x}{2a}\right)\left(1 - \frac{y}{2b}\right), \qquad N_j = \frac{x}{2a}\left(1 - \frac{y}{2b}\right),$$

$$N_k = \frac{x}{2a}\frac{y}{2b}, \qquad N_l = \left(1 - \frac{x}{2a}\right)\frac{y}{2b}, \tag{2.19}$$

Innym podejściem, jest sformułowanie izoparametryczne, gdzie funkcje kształtu są wyrażone we współrzędnych znormalizowanych ξ, η. Wtedy za pomocą tych samych funkcji kształtu można przedstawić przemieszczenia *u* i *v* oraz zmienne *x* i *y*.

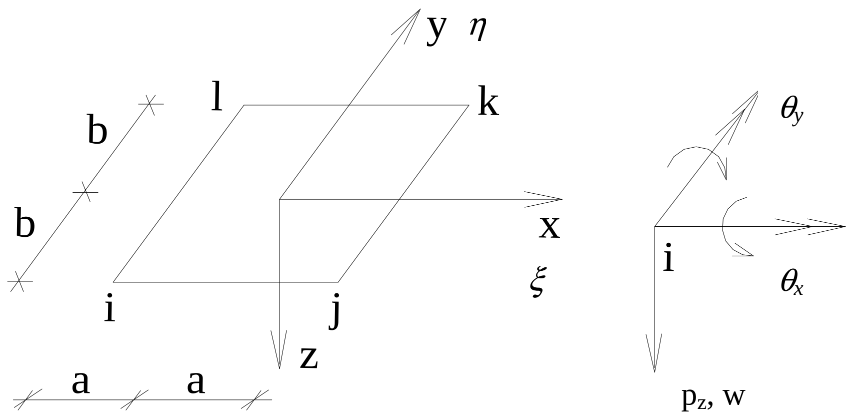
$$\begin{cases} x = \sum\limits_{\alpha=i}^{l} N'_{\alpha} x_{\alpha} \\ y = \sum\limits_{\alpha=i}^{l} N'_{\alpha} y_{\alpha} \end{cases}, \tag{2.20}$$

oraz

$$\begin{cases} u = \sum\limits_{\alpha=i}^{l} N'_{\alpha} u_{\alpha} \\ v = \sum\limits_{\alpha=i}^{l} N'_{\alpha} v_{\alpha} \end{cases}, \tag{2.21}$$

Te same funkcje kształtu opisują pole przemieszczeń wewnątrz elementu oraz jego geometrię.

2.4 Opis prostokątnego czterowęzłowego elementu płytowego



Rys. 2.3

Każdy węzeł posiada trzy stopnie swobody w_{α}, $\theta_{x\alpha}$, $\theta_{y_{\alpha}}$ $(\alpha = i, j, k, l)$. Wektor przemieszczeń węzłowych elementu ma postać

$$\{r^b\}^T = \{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad . \quad . \quad . \quad w_l \quad \theta_{xl} \quad \theta_{yl}\}^T, \tag{2.22}$$

Pole przemieszczeń można opisać wielomianem

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + \\ + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3, \tag{2.23}$$

W zapisie macierzowym

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^{3y} & xy^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{Pa}\,, \tag{2.24}$$

uwzględniając związki

$$w,_x = \theta_y \ ,$$

$$w,_y = -\theta_x\,, \tag{2.25}$$

oraz podstawiając do (2.23) i (2.25) przemieszczenia węzłowe r_α^b można wyznaczyć nieznane wartości a_i

$$\mathbf{r}^b = \mathbf{Ca}\,, \tag{2.26}$$

stąd

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}^b\,, \tag{2.27}$$

Macierz funkcji kształtu będzie wynosiła

$$\mathbf{N}^b = \mathbf{PC}^{-1}\,, \tag{2.28}$$

gdzie

$$\mathbf{N}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i^b & \mathbf{N}_j^b & \mathbf{N}_k^b & \mathbf{N}_l^b \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

$$\left\{\mathbf{N}_\alpha^b\right\}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (\xi_0+1)(\eta_0+1)(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2) \\ a\xi_\alpha(1+\xi_0)^2(\xi_0-1)(\eta_0+1) \\ b\eta_\alpha(1+\xi_0)(\xi_0+1)^2(\eta_0-1) \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

gdzie $\xi_0 = \xi\cdot\xi_\alpha\,,\ \eta_0 = \eta\cdot\eta_\alpha\,,\ \alpha = i, j, k, l\,.$

Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa otrzymuje się zależności

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} = -z\mathbf{N},_x^b\,\mathbf{r}^b$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} = -z\mathbf{N},_y^b\,\mathbf{r}^b\,, \tag{2.31}$$

Macierz liniowa funkcji kształtu odkształceń ma postać

$$\mathbf{B}_L^b = \begin{Bmatrix} -z\mathbf{N},_{xx}^b \\ -z\mathbf{N},_{yy}^b \\ -2z\mathbf{N},_{xy}^b \end{Bmatrix}, \tag{2.32}$$

Dla dużych ugięć płyty oraz przy uwzględnieniu ugięcia początkowego należy uwzględnić składowe nieliniowe

$$\boldsymbol{\eta}^b = \begin{Bmatrix} \eta_x^b \\ \eta_y^b \\ \eta_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} & \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}, \tag{2.33}$$

Jeśli pole przemieszczeń początkowych opisze się za pomocą tych samych funkcji kształtu, które opisują ugięcia powstałe od działających obciążeń, wówczas wektor nieliniowych odkształceń $\boldsymbol{\eta}^b$ będzie miał postać

$$\boldsymbol{\eta}^b = \mathbf{B}_0^b \mathbf{r}^b + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}^b \mathbf{r}^b \;, \tag{2.34}$$

$$\mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_0^b)^T (\mathbf{N},_x^b)^T & 0 \\ 0 & (\mathbf{r}_0^b)^T (\mathbf{N},_y^b)^T \\ (\mathbf{r}_0^b)^T (\mathbf{N},_y^b)^T & (\mathbf{r}_0^b)^T (\mathbf{N},_x^b)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N},_x^b \\ \mathbf{N},_y^b \end{Bmatrix}, \tag{2.35}$$

Macierz $\mathbf{B}_{NL}^b$ ma taką samą postać jak macierz $\mathbf{B}_0^b$. Przy małych ugięciach płyty wartości elementów macierzy $\mathbf{B}_{NL}^b$ są pomijalnie małe w porównaniu z $\mathbf{B}_L^b$.

Pole przemieszczeń wewnątrz elementu powłokowego, który ma zastosowanie w analizie dużych ugięć płyty jest opisane przez zsumowanie pola przemieszczeń elementu tarczowego i płytowego

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^m & 0 & -z\mathbf{N},_y^b \\ 0 & \mathbf{N}^m & -z\mathbf{N},_x^b \\ 0 & 0 & \mathbf{N}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_x^m \\ \mathbf{r}_y^m \\ \mathbf{r}^b \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{r} \;, \tag{2.36}$$

Macierz funkcji kształtu odkształceń dla elementu powłokowego jest sumą macierzy funkcji kształtu odkształceń tarczy i płyty

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ 2L_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_x^m \\ l_y^m \\ 2l_{xy}^m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l_x^b \\ l_y^b \\ 2l_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \eta_x^b \\ \eta_y^b \\ \eta_{xy}^b \end{Bmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{B}^m \mathbf{r}^m + \mathbf{B}_L^b \mathbf{r}^b + \mathbf{B}_0^b \mathbf{r}^b + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}^b \mathbf{r}^b = \mathbf{B}\mathbf{r} \;, \tag{2.38}$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}^m \quad \left(\mathbf{B}_L^b + \mathbf{B}_0^b + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL}^b \right) \right], \tag{2.39}$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^m \\ \mathbf{r}^b \end{Bmatrix}, \tag{2.40}$$

$$\mathbf{B}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{N},_x^m & 0 \\ 0 & \mathbf{N},_y^m \\ \mathbf{N},_y^m & \mathbf{N},_x^m \end{bmatrix}, \tag{2.41}$$

2.5 Sformułowanie wariacyjne przyrostowych równań równowagi w zakresie geometrycznie nieliniowym

Równanie pracy wirtualnej ma postać:

$$\int_V \delta\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta\mathbf{d}^T \mathbf{b} dV - \int_{A_t} \delta\mathbf{d}^T \mathbf{t} dA = 0, \tag{2.42}$$

gdzie $\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{r}$, $\mathbf{L} = \mathbf{B}(\mathbf{r})\mathbf{r} = \mathbf{L}(\mathbf{r})$, stąd $\delta\mathbf{d} = \mathbf{N}\delta\mathbf{r}$ oraz $\delta\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}}\delta\mathbf{r}$ wówczas równanie (2.42) można zapisać w postaci

$$\int_V \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{p} = 0, \tag{2.43}$$

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_{A_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dA, \tag{2.44}$$

macierz $\mathbf{p}$ jest wektorem sił węzłowych. W zakresie sprężystym przy założeniu, że istnieją naprężenia początkowe $\boldsymbol{\sigma}_0$ wartość wektora naprężenia wynosi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma}_0, \tag{2.45}$$

Jeśli zdefiniuje się przyrost liniowy $\Delta\mathbf{p}$

$$\Delta\mathbf{p} = \int_V \left[\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \Delta\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \Delta \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] dV, \tag{2.46}$$

oraz $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ taki, że

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \Delta\mathbf{r} = \mathbf{D}^{e-p} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \Delta\mathbf{r}, \tag{2.47}$$

wówczas otrzymuje się

$$\Delta\mathbf{p} = \left\{ \int_V \left[\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \mathbf{D}^{e-p} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial \mathbf{L}^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right] dV \right\} \Delta\mathbf{r}, \tag{2.48}$$

Macierz $\mathbf{D}^{e-p}$ jest macierzą styczna stałych sprężystości w zakresie sprężysto-plastycznym materiału. Dla materiału w zakresie liniowo sprężystym macierz $\mathbf{D}^{e-p}$ przechodzi w macierz stałych sprężystości **D**. Równanie (2.48) stanowi ogólna przyrostową postać stanu równowagi ciała przy założeniu fizycznej i geometrycznej nieliniowości. Łącząc element tarczowy i płytowy można zapisać

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} = \left[\mathbf{B}^m \quad [\mathbf{B}_L^b + \mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_{NL}^b]\right], \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}^2} = \left[0 \quad [(\mathbf{B}_{NL}^b),_{\mathbf{r}}]\right], \tag{2.50}$$

$$(\mathbf{B}_{NL}^b),_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{N},_x^b\right)^T & 0 \\ 0 & \left(\mathbf{N},_y^b\right)^T \\ \left(\mathbf{N},_y^b\right)^T & \left(\mathbf{N},_x^b\right)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N},_x^b \\ \mathbf{N},_y^b \end{Bmatrix}, \tag{2.51}$$

Po podstawieniu (2.49), (2.50) i (2.51) do (2.48) otrzymuje się

$$\left(\int_V \left[\mathbf{B}^m \quad [\mathbf{B}_L^b + \mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_{NL}^b]\right]^T \mathbf{D} \left[\mathbf{B}^m \quad [\mathbf{B}_L^b + \mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_{NL}^b]\right] dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \left[0 \quad [(\mathbf{B}_{NL}^b),_r]\right] dV \right) \Delta\mathbf{r} - \Delta\mathbf{p} = 0 \tag{2.52}$$

Inaczej zapisane równanie (2.52) ma postać

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{r} - \Delta\mathbf{p} = 0, \tag{2.53}$$

gdzie $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\sigma})$. Macierz $\mathbf{K}_T$ nosi nazwę stycznej macierzy sztywności.

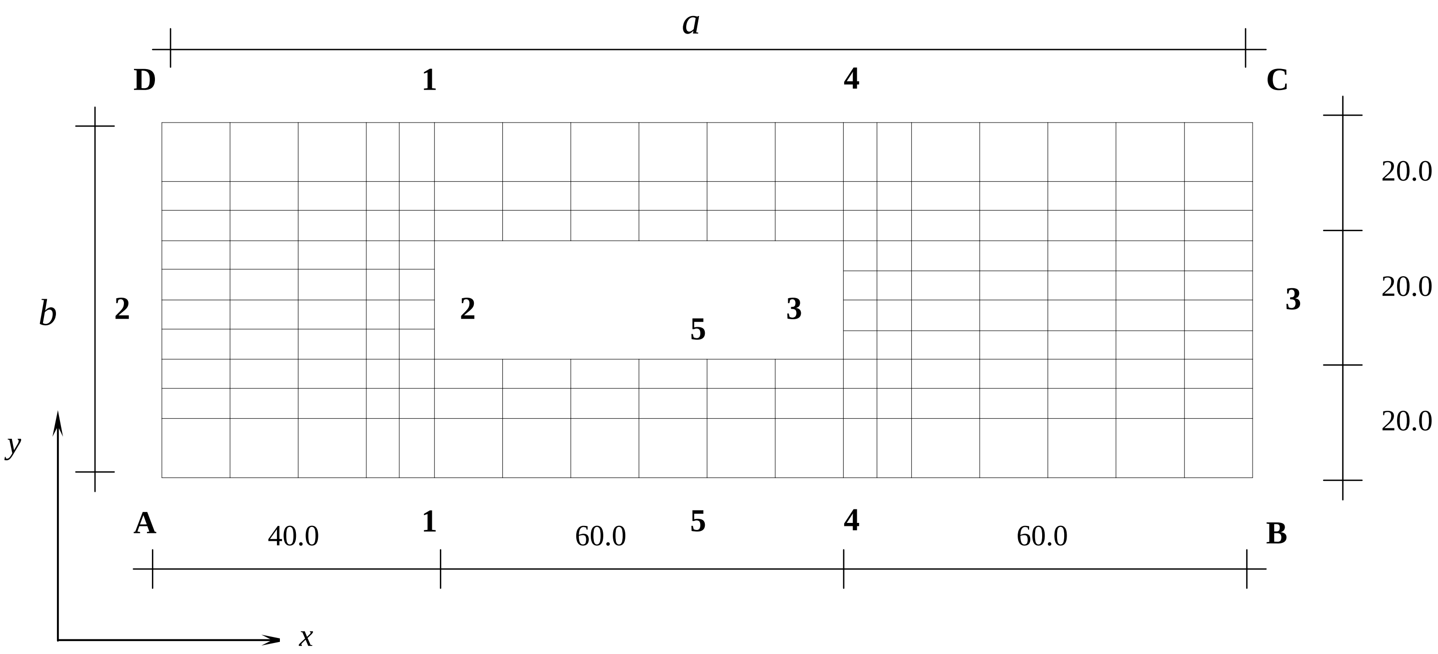
$$\mathbf{K}_1(\mathbf{r}) = \int_V \left[\mathbf{B}^m \quad [\mathbf{B}_L^b + \mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_{NL}^b]\right]^T \mathbf{D} \left[\mathbf{B}^m \quad [\mathbf{B}_L^b + \mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_{NL}^b]\right] dV, \tag{2.54}$$

$$\mathbf{K}_2(\boldsymbol{\sigma}) = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \left[0 \quad [(\mathbf{B}_{NL}^b),_r]\right] dV, \tag{2.55}$$

Przy założeniu małych ugięć i braku ugięć początkowych macierz styczna $\mathbf{K}_T$ przechodzi w liniową macierz sztywności $\mathbf{K}$. Składnik $\mathbf{K}_2(\boldsymbol{\sigma})$ może być pominięty, gdy składowe membranowe wektora naprężenia są równe zero. Warunek ten zachodzi przy małych ugięciach i braku naprężeń tarczowych.

3 Przykłady obliczeń

Analizowanym przykładem jest płyta cienka, kwadratowa z otworem. Analizę nieliniową przeprowadzono przy użyciu programu metody elementów skończonych ABAQUS. Obszar płyty podzielono na elementy skończone powłokowe czterowęzłowe o pięciu stopniach swobody i czterech punktach Gaussa. Element ten stanowi połączenie elementu tarczowego i płytowego opisanych w p. **2.2**. Podział na elementy skończone oraz wymiary płyty pokazano na rys. 3.1. W pobliżu krawędzi otworu zagęszczono siatkę elementów skończonych. Przyjęto następujące własności materiałowe: moduł Younga $E = 205$ GPa, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$ oraz grubość płyty h = 2.0.

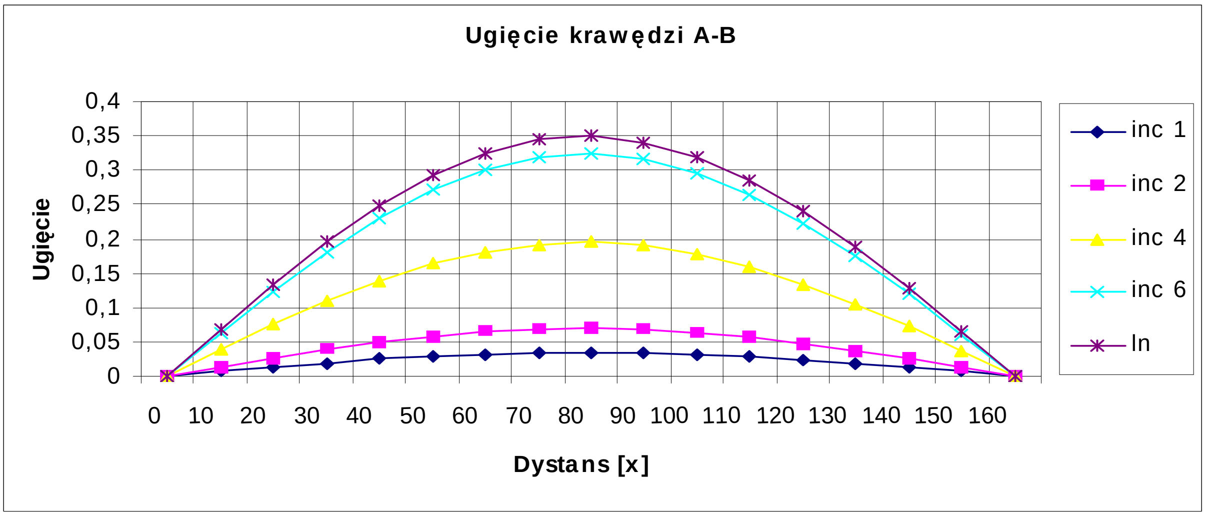


Rys. 3.1

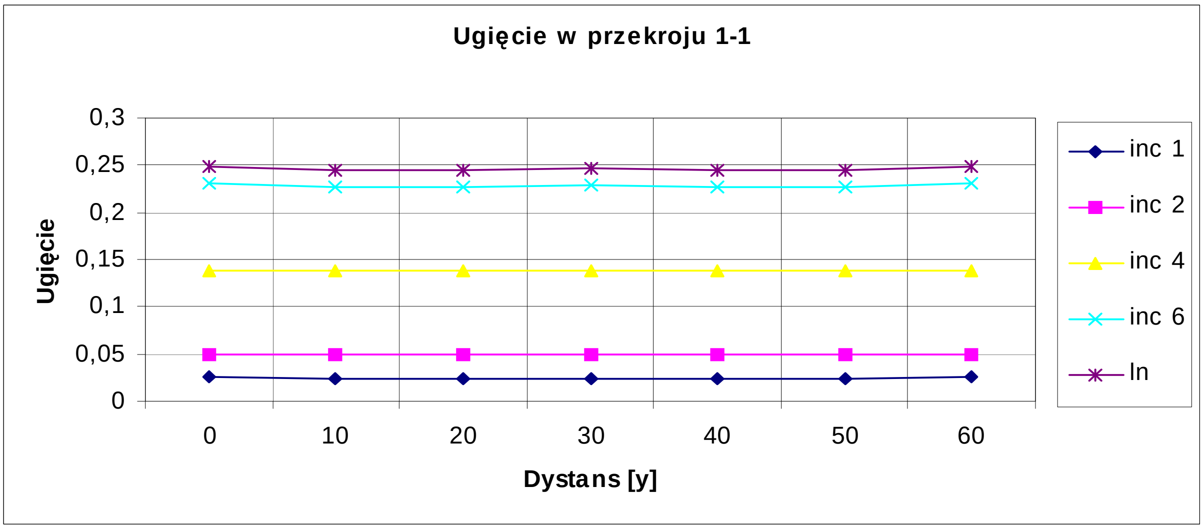
Warunki brzegowe: krawędzie **A-D** oraz **B-C** są podparte swobodnie z blokadą przemieszczeń na kierunkach x i y (u = v = w = 0). Krawędzie **A-B** i **C-D** oraz krawędzie otworu są swobodne.

3.1. Płyta z otworem poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu

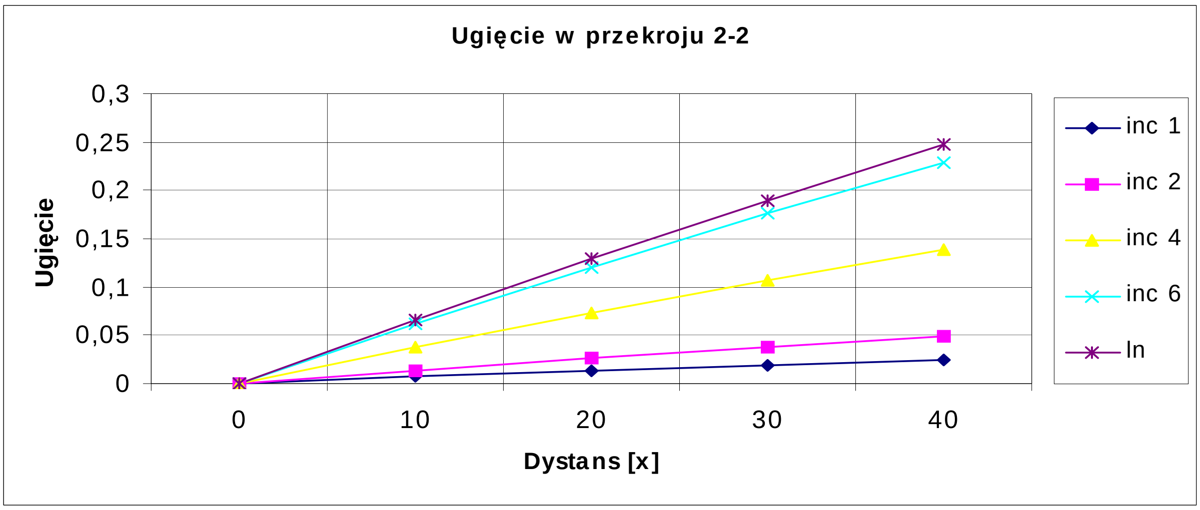
Płyta została poddana obciążeniu równomiernie rozłożonemu o intensywności q = 5kN/m^2. Na rys. 3.1.1-3.1.6 przedstawiono ugięcia płyty w przekrojach zaznaczonych na rys. 3.1 otrzymane na drodze analizy geometrycznie nieliniowej oraz odpowiadające im rozwiązanie liniowe klasycznej teorii płyt. Na rys. 3.1.7-3.1.10 podano przemieszczenia membranowe *u* i *v*. Na rys. 3.1.7-3.1.10 podano przemieszczenia membranowe *u* i *v* a na rys. 3.2.11-3.2.20 wykresy momentów zginających i skręcających w postaci warstwic. Tabela 3.1 przedstawia maksymalne ugięcia oraz naprężenia σ_x i σ_y.



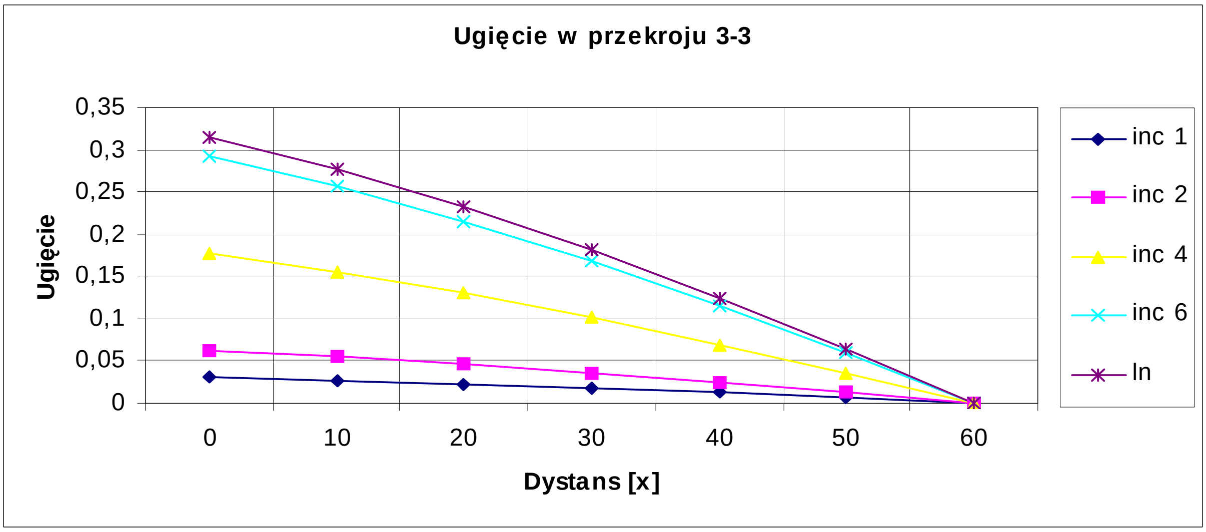
Rys. 3.1.1



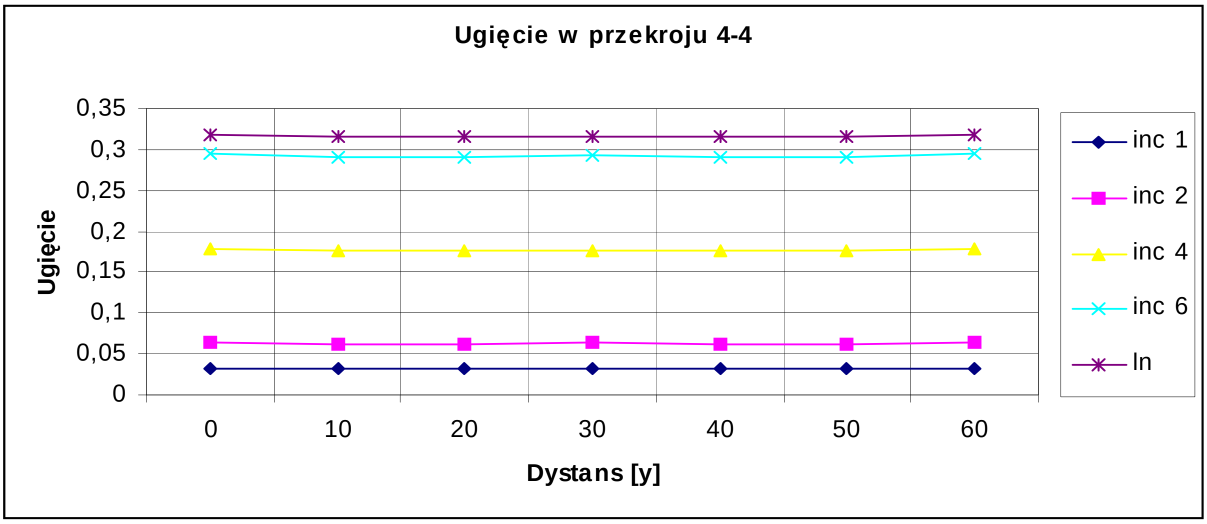
Rys. 3.1.2



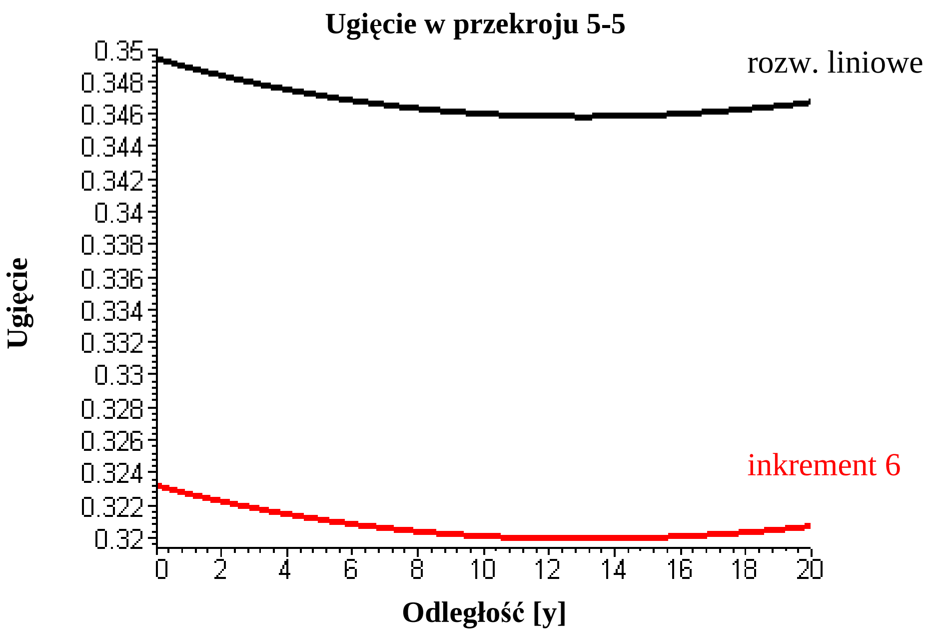
Rys. 3.1.3



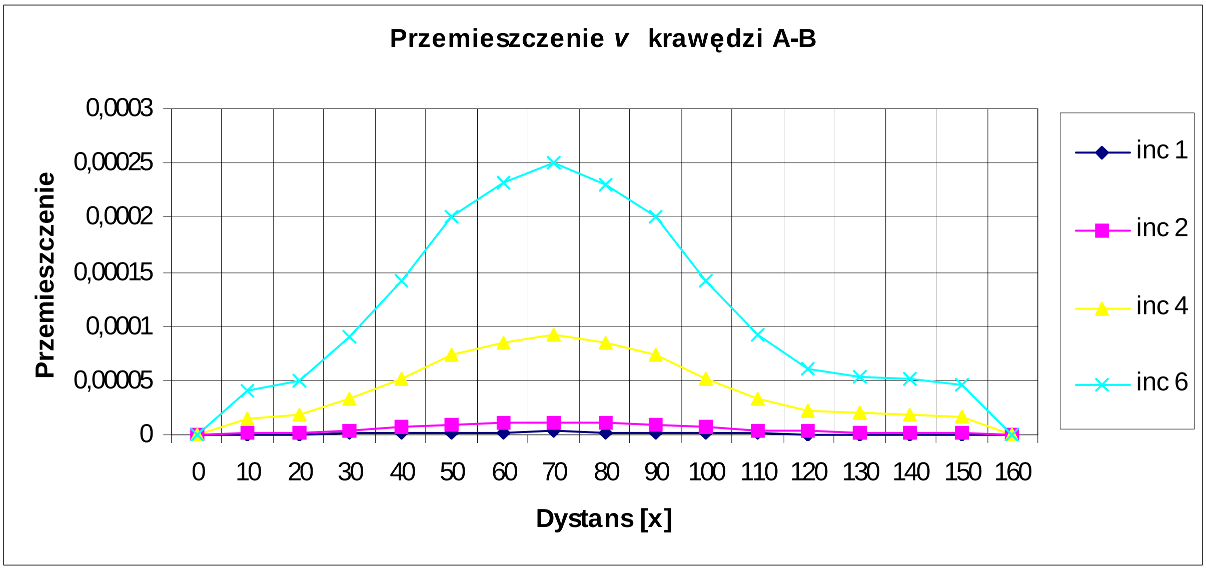
Rys. 3.1.4



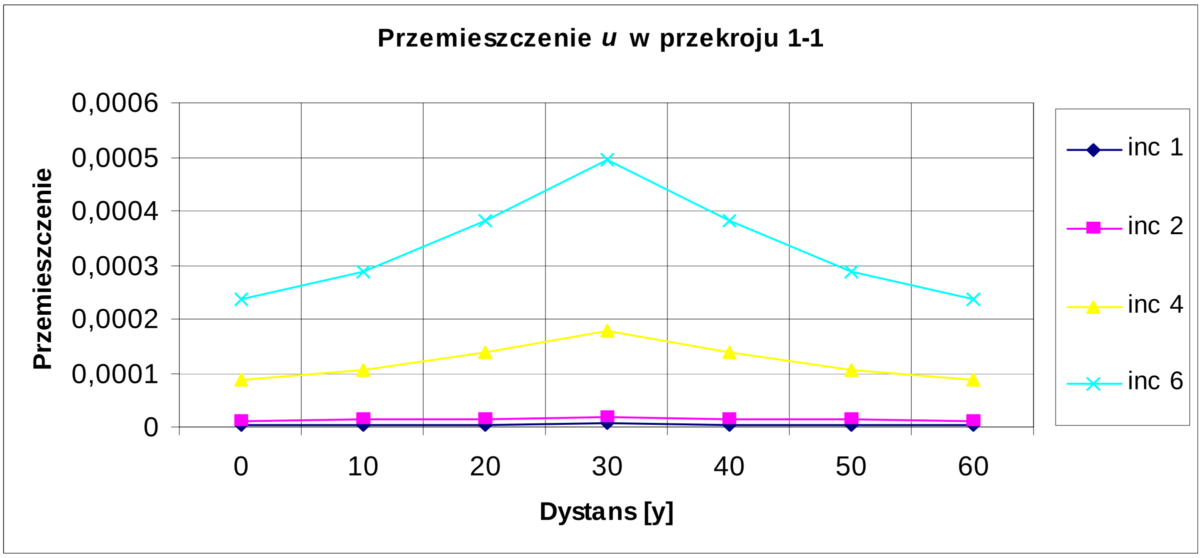
Rys. 3.1.5



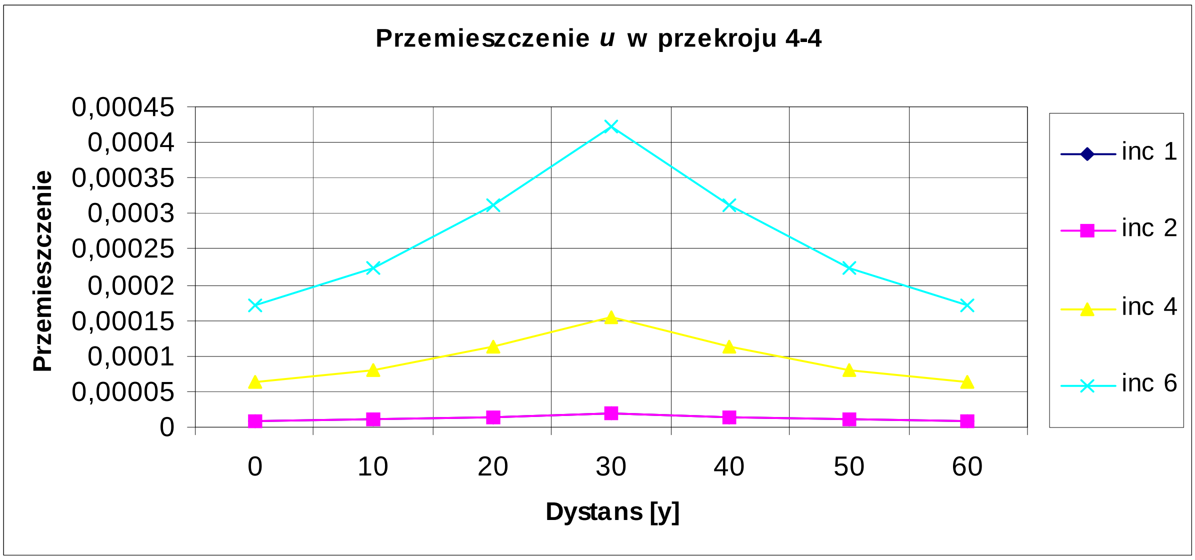
Rys. 3.1.6



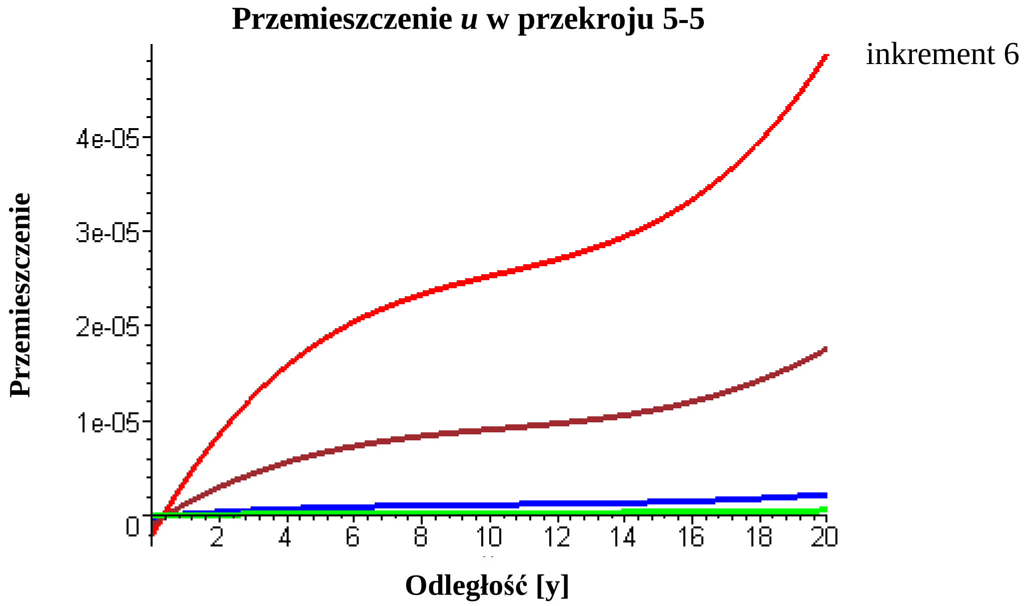
Rys. 3.1.7



Rys. 3.1.8



Rys. 3.1.9



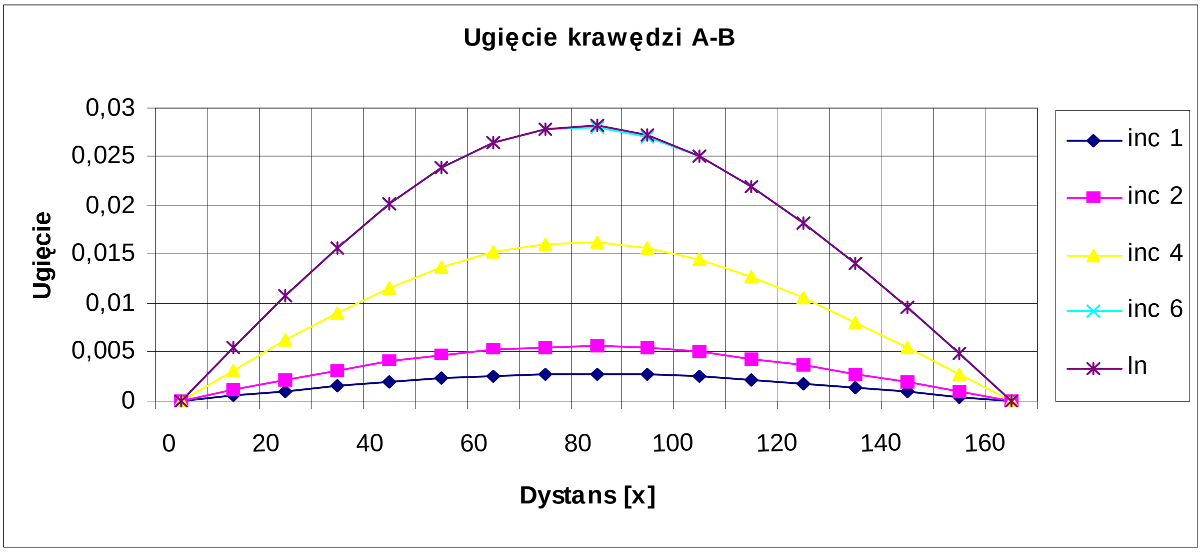
Rys. 3.1.10

Tabela 3.1

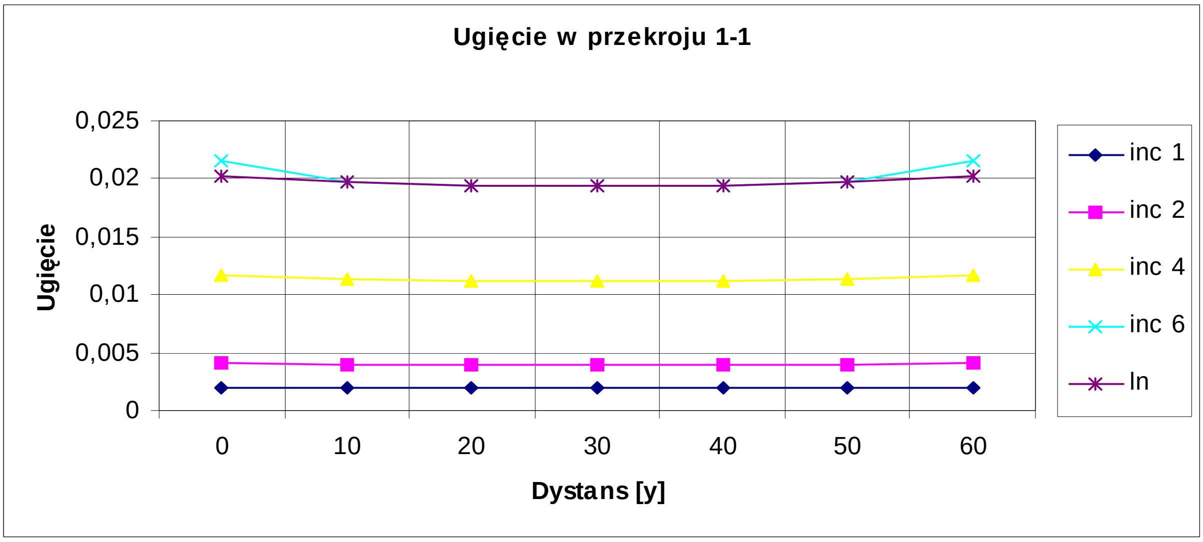
	Rozwiązanie liniowe	Rozwiązanie nieliniowe war. brzeg. wg. rys. 3.1	Rozwiązanie nieliniowe $u_{B\text{-}C}\neq 0$ i $v_{B\text{-}C}\neq 0$
wD/pa^2b^2 [-]	0,113876	0,105337	0,113876
σ_x [N/m^2]	$3{,}1405 \cdot 10^7$ $-3{,}1405 \cdot 10^7$	$3{,}1803 \cdot 10^7$ $-2{,}6233 \cdot 10^7$	$3{,}1341 \cdot 10^7$ $-3{,}1404 \cdot 10^7$
σ_y [N/m^2]	$3{,}8098 \cdot 10^6$ $-3{,}8098 \cdot 10^6$	$2{,}3886 \cdot 10^6$ $-4{,}7754 \cdot 10^6$	$3{,}8252 \cdot 10^6$ $-3{,}7992 \cdot 10^6$

3.2. Płyta z otworem poddana obciążeniu rozłożonemu liniowo wzdłuż krawędzi swobodnych

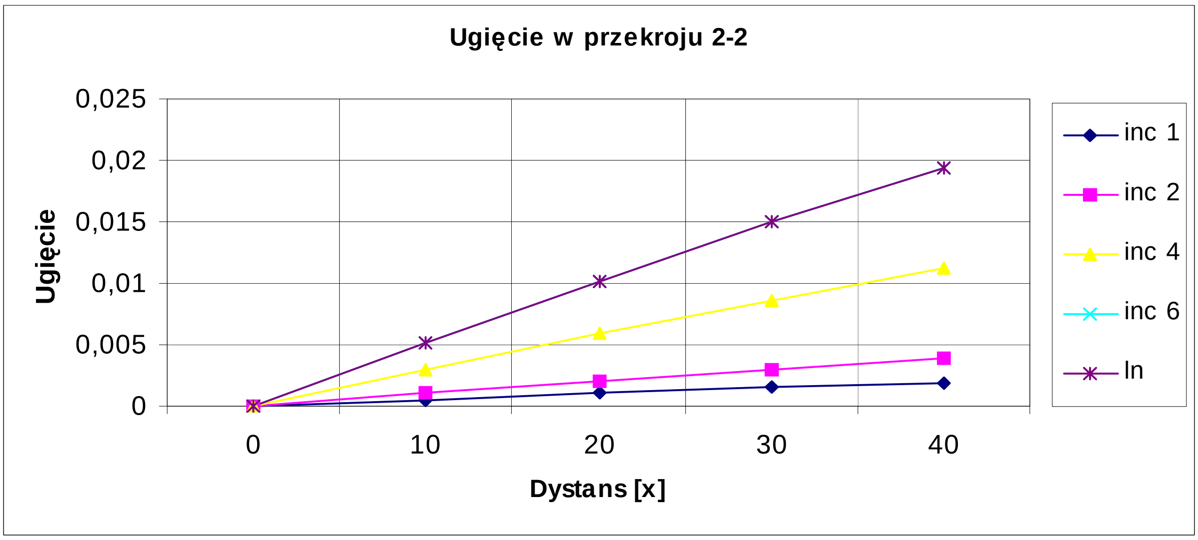
Na płytę przyłożono obciążenie rozłożone równomiernie liniowo wzdłuż zewnętrznych krawędzi o intensywności q = 15 kN/m. Na rys. 3.2.1-3.2.6 przedstawiono ugięcia płyty w przekrojach zaznaczonych na rys. 3.1 otrzymane na drodze analizy geometrycznie nieliniowej oraz odpowiadające im rozwiązanie liniowe klasycznej teorii płyt. Na rys.3.2.7-3.2.10 podano przemieszczenia membranowe *u* i *v* a na rys. 3.2.11-3.2.20 wykresy momentów zginających i skręcających w postaci warstwic. Tabela 3.2 przedstawia maksymalne ugięcia oraz naprężenia σ_x i σ_y.



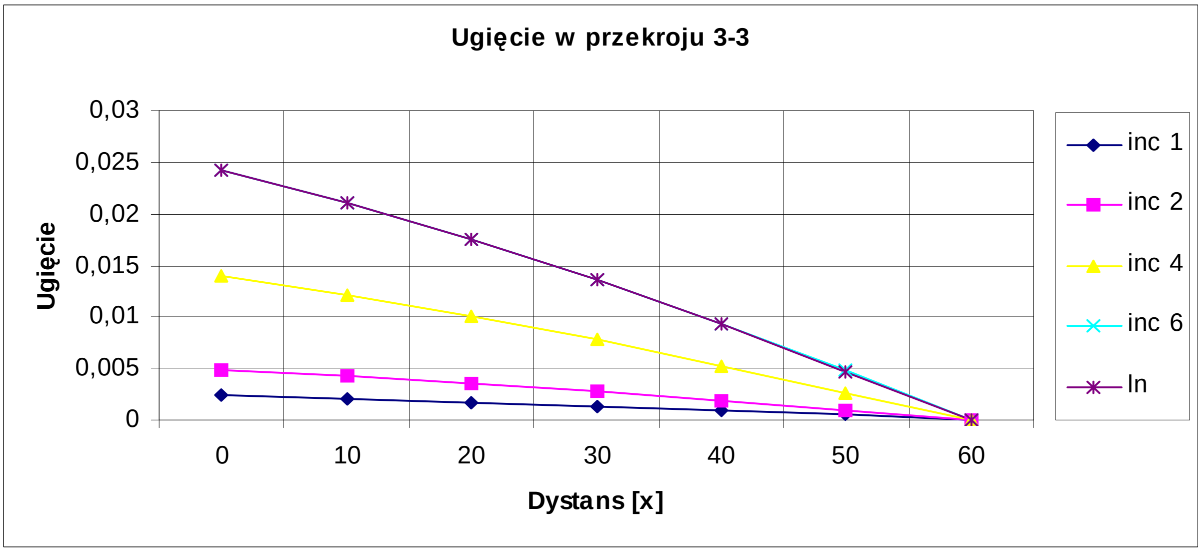
Rys. 3.2.1



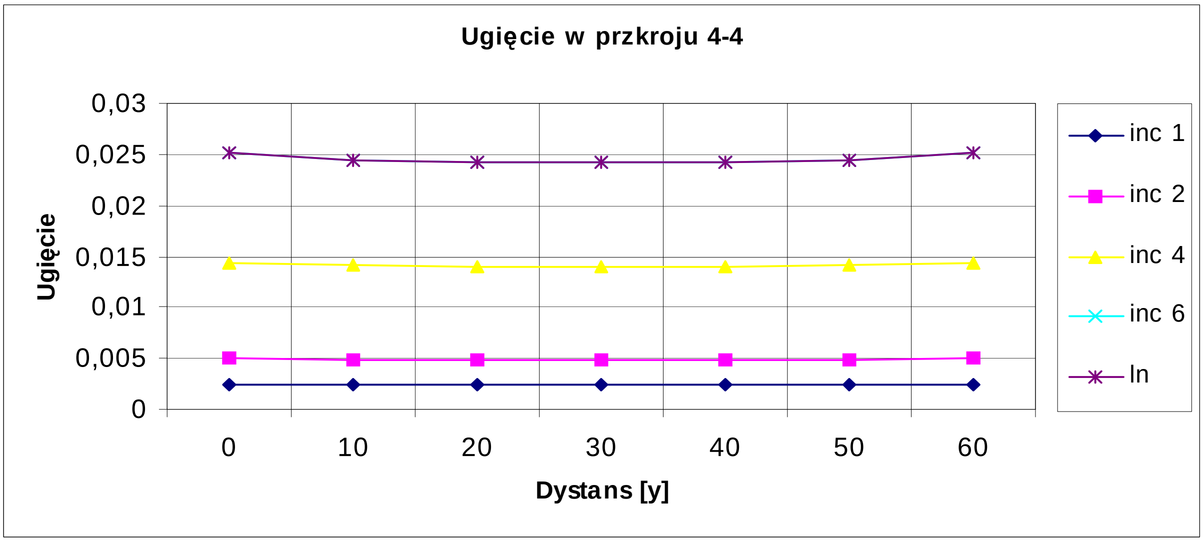
Rys. 3.2.2



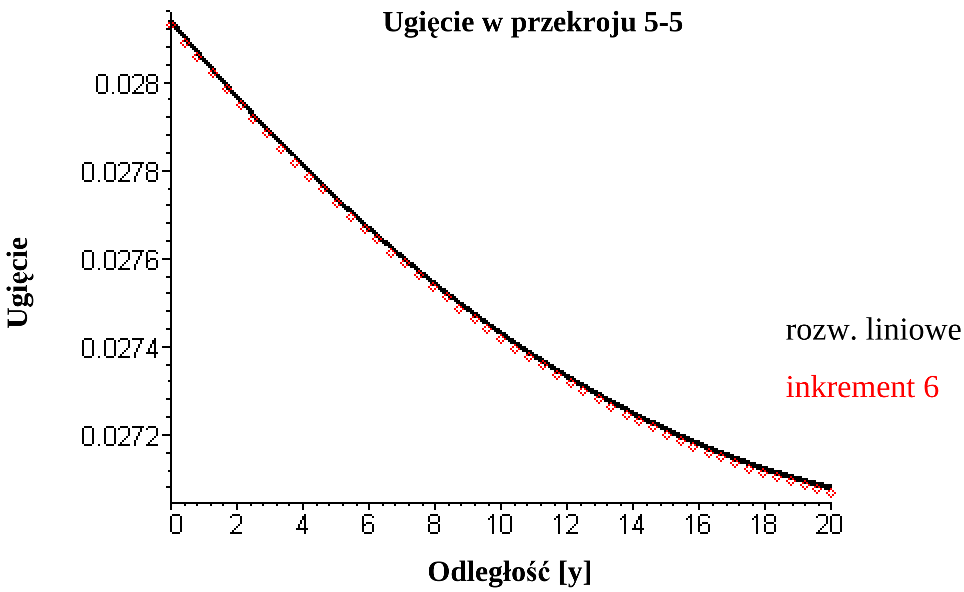
Rys. 3.2.3



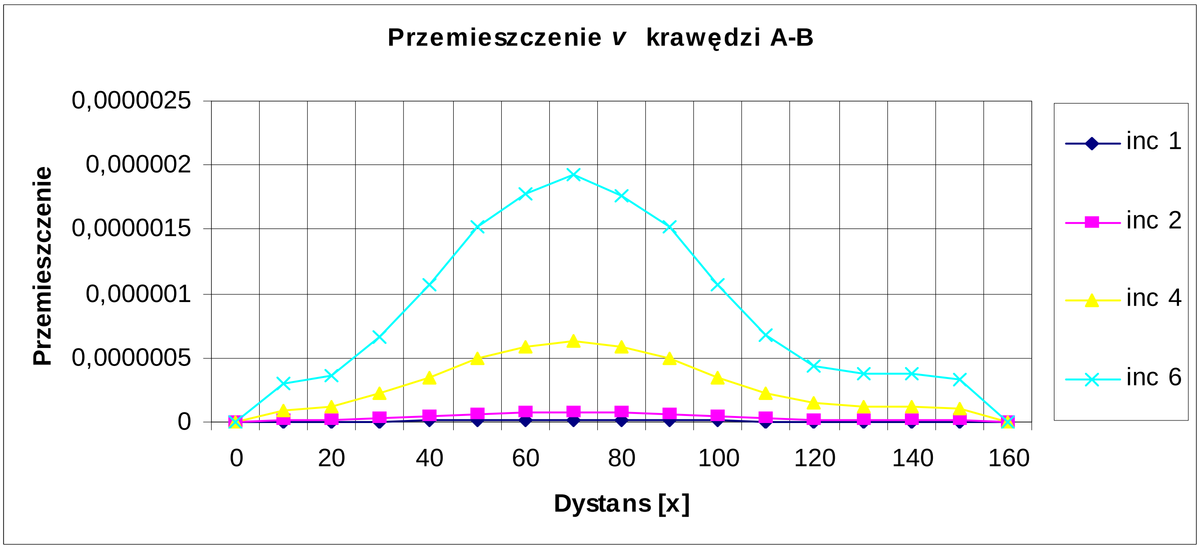
Rys. 3.2.4



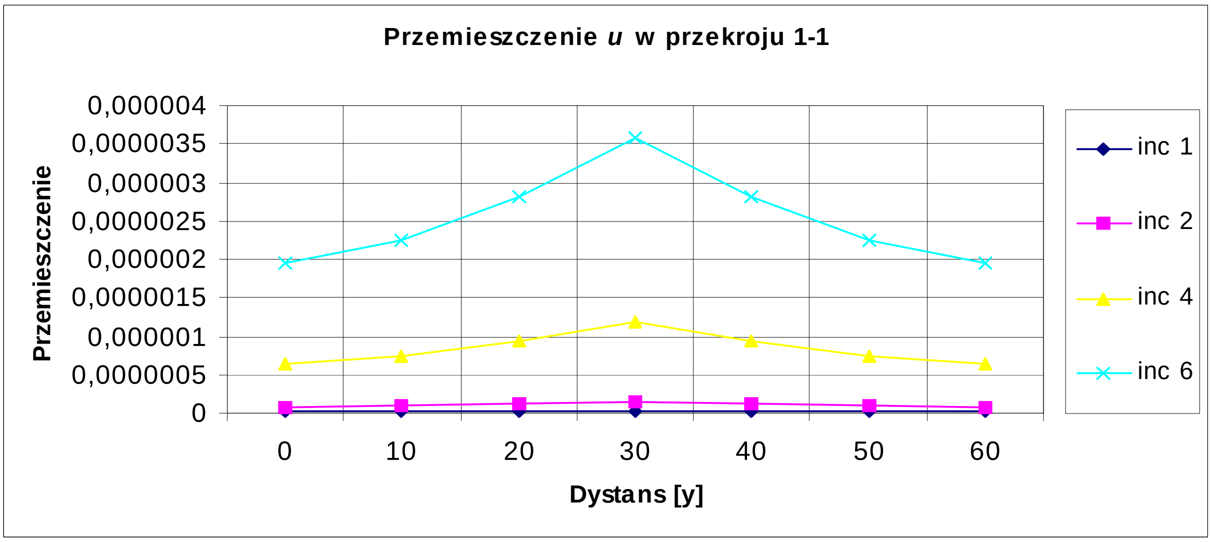
Rys. 3.2.5



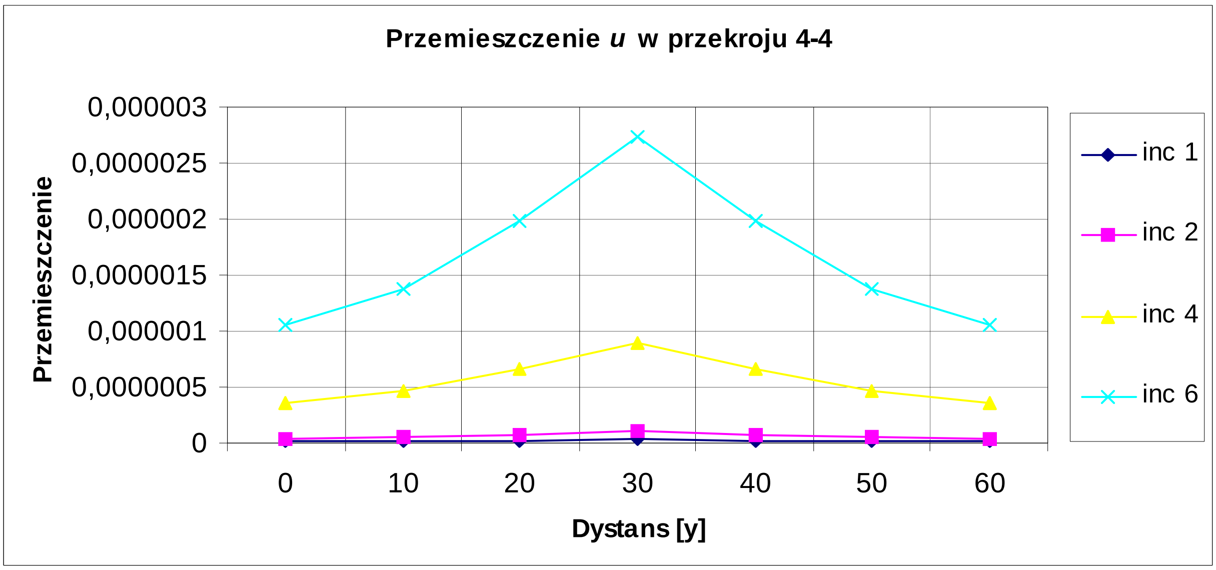
Rys. 3.2.6



Rys. 3.2.7

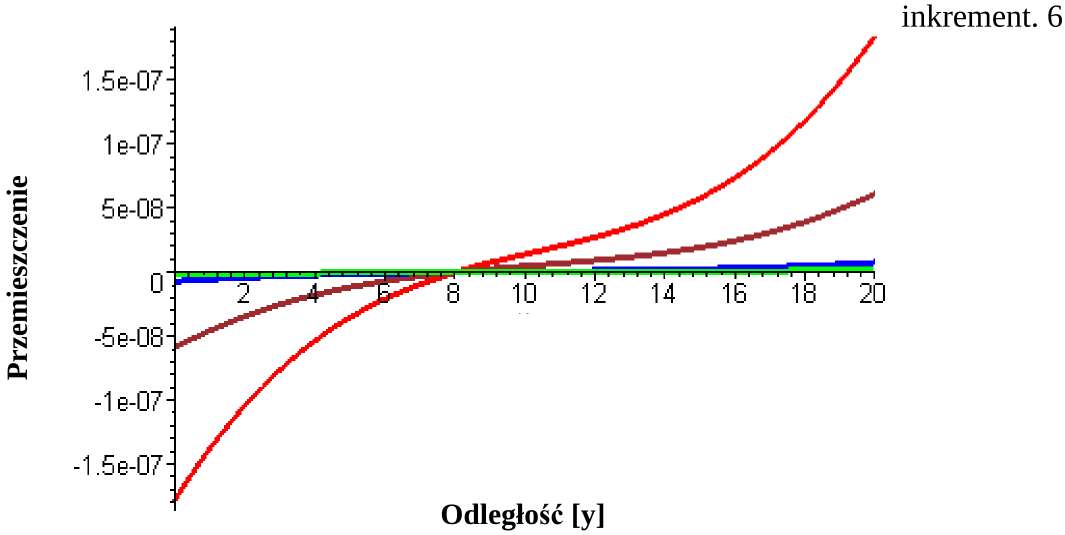


Rys. 3.2.8



Rys. 3.2.9

Przemieszczenie *u* w przekroju 5-5



Rys. 3.2.10

Tabela 3.2

	Rozwiązanie liniowe	Rozwiązanie nieliniowe war. brzeg. wg. rys. 3.1	Rozwiązanie nieliniowe $u_{B\text{-}C}\neq 0$ i $v_{B\text{-}C}\neq 0$
wD/pa^2b^2 [-]	0,009171	0,009167	0,009173
σ_x [N/m^2]	$2{,}4643 \cdot 10^6$ $-2{,}4643 \cdot 10^6$	$2{,}7472 \cdot 10^6$ $-3{,}5914 \cdot 10^6$	$2{,}464 \cdot 10^6$ $-2{,}462 \cdot 10^6$
σ_y [N/m^2]	$1{,}9175 \cdot 10^5$ $-1{,}9175 \cdot 10^5$	$1{,}9213 \cdot 10^5$ $-1{,}9213 \cdot 10^5$	$1{,}9175 \cdot 10^5$ $-1{,}9211 \cdot 10^5$

Dla przyjętego warunku brzegowego w postaci blokady przemieszczeń *u*, *v* i *w* na obu przeciwległych krawędziach rozwiązanie geometrycznie nieliniowe daje mniejsze wartości ugięć niż rozwiązanie liniowe. Przyczyną tego są naprężenia membranowe widoczne przy ugięciach płyty bliskich wartości 20 % jej grubości. Schodzące się krawędzie płyty przy otworze są miejscem koncentracji naprężeń. Maksymalne ugięcia otrzymano w przekroju 5-5. Wartości podano w tabelach 3.1 i 3.2.

Literatura i materiały źródłowe

[1] **Roz. 1 i 2** M. Kmiecik, M. Wizmur, E. Bielewicz : *Analiza nieliniowa tarcz i płyt* Politechnika Gdańska 1995

[2] **Roz. 1** W. Barański, Z. Więckowski: *Metody obliczeniowe mechaniki nieliniowej-wykłady dla studium doktoranckiego*

[3] **Roz. 1** J. Rakowski: *Teoria sprężystości i plastyczności-materiały dydaktyczne Politechniki Poznańskiej*