

**POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH
ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI**

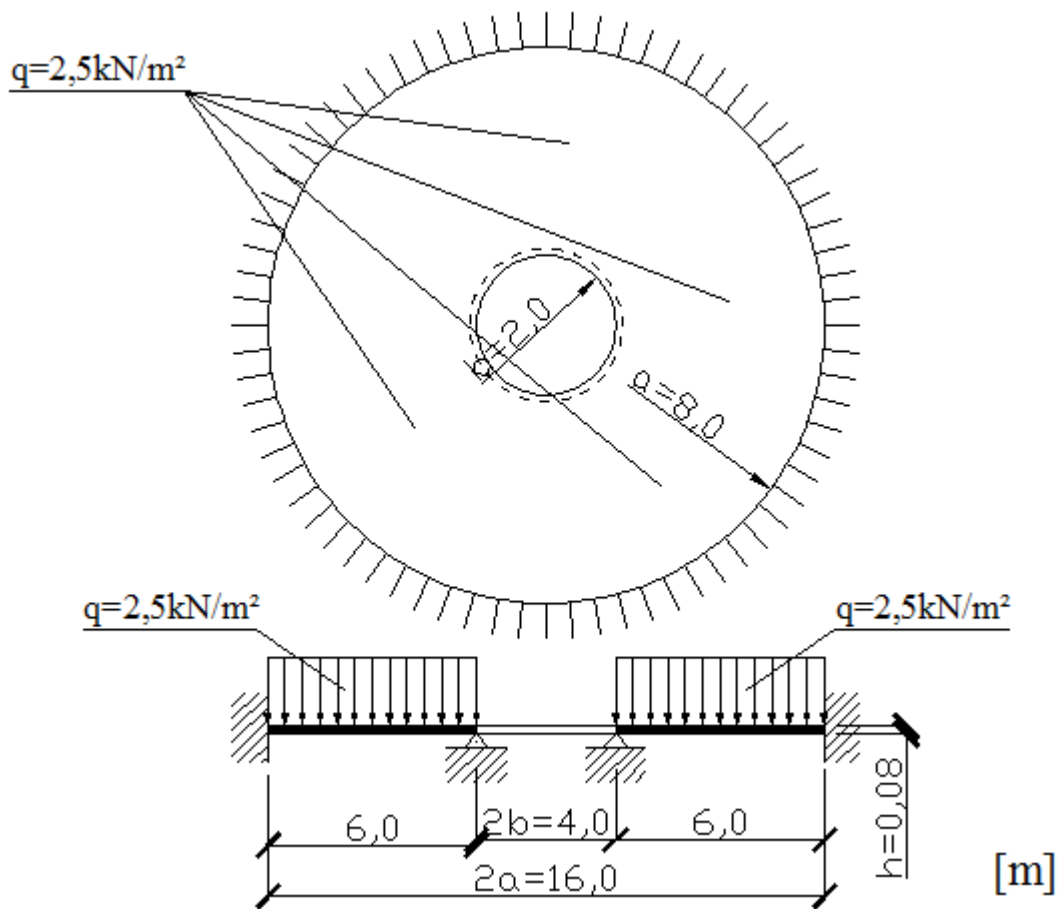
ĆWICZENIE NR 2

OBLICZANIE UKŁADÓW OSIOWO-SYMETRYCZNYCH

**Opracował: Bartosz Dembiński
Grupa: KBI 3
Rok akademicki: 2010/11
Semestr: I**

POZNAŃ, 2011

Dla zadanego schematu statycznego i obciążenia płyty kołowej wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych oraz przemieszczeń



Dane:

$E=30\text{GPa}$

$\nu=0,16$

$a=8,0\text{m}$

$b=2,0\text{m}$

$h=0,08\text{m}$

$q=2,5\text{kN/m}^2$

Sztywność płyty:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 0,08^3}{12(1-0,16^2)} = 1313,6289 \text{ kNm}$$

Ugięcie:

$$w(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{q}{64D} r^4$$

Pochodne funkcji ugięcia:

$$\frac{\partial w(r)}{\partial r} = \frac{C_1}{r} + 2C_2 r \ln r + C_2 r + 2C_3 r + \frac{4q}{64D} r^3$$

$$\frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_2 \ln r + 2C_2 + C_2 + 2C_3 + \frac{12q}{64D} r^2$$

$$\frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_2 \ln r + 3C_2 + 2C_3 + \frac{12q}{64D} r^2$$

Warunki brzegowe:

1) $w(r = 8) = 0$

2) $\frac{\partial w(r = 8)}{\partial r} = 0$

3) $w(r = 2) = 0$

4) $M_r(r = 2) = 0$

1) $w(r = 8) = 0$

$$C_1 \ln 8 + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{q}{64D} r^4 = 0$$

$$C_1 \cdot \ln 8 + C_2 \cdot 8^2 \cdot \ln 8 + C_3 \cdot 8^2 + C_4 + \frac{2,5}{64 \cdot 1313,6289} \cdot 8^4 = 0$$

$$2,079441542 \cdot C_1 + 133,0842587 \cdot C_2 + 64,0 \cdot C_3 + C_4 + 0,1218 = 0$$

2) $\frac{\partial w(r = 8)}{\partial r} = 0$

$$\frac{C_1}{r} + 2C_2 r \ln r + C_2 r + 2C_3 r + \frac{4q}{64D} r^3 = 0$$

$$\frac{C_1}{8} + 2 \cdot C_2 \cdot 8 \cdot \ln 8 + C_2 \cdot 8 + 2 \cdot C_3 \cdot 8 + \frac{4 \cdot 2,5}{64 \cdot 1313,6289} \cdot 8^3 = 0$$

$$0,125 \cdot C_1 + 41,27106467 \cdot C_2 + 16,0 \cdot C_3 + 0,06089999999 = 0$$

3) $w(r = 2) = 0$

$$C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{q}{64D} r^4 = 0$$

$$C_1 \cdot \ln 2 + C_2 \cdot 2^2 \cdot \ln 2 + C_3 \cdot 2^2 + C_4 + \frac{2,5}{64 \cdot 1313,6289} \cdot 2^4 = 0$$

$$0,6931471806 \cdot C_1 + 2,772588722 \cdot C_2 + 4,0 \cdot C_3 + C_4 + 0,0004757812499 = 0$$

$$4) M_r(r = 2) = 0$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$-D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0$$

$$-1313,6289 \cdot \left(-\frac{C_1}{2^2} + 2 \cdot C_2 \cdot \ln 2 + 3 \cdot C_2 + 2 \cdot C_3 + \frac{12 \cdot 2,5}{64 \cdot 1313,6289} \cdot 2^2 + \right. \\ \left. + \frac{0,16}{2} \left(\frac{C_1}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot 2 \cdot \ln 2 + C_2 \cdot 2 + 4 \cdot C_3 + \frac{4 \cdot 2,5}{64 \cdot 1313,6289} \cdot 2^3 \right) \right) = 0$$

$$-1313,6289 \cdot (-0,25 \cdot C_1 + 4,386294361 \cdot C_2 + 2 \cdot C_3 + 0,00142734375 + \\ + 0,08(0,5 \cdot C_1 + 4,772588722 \cdot C_2 + 4 \cdot C_3 + 0,0009515624999)) = 0$$

$$-1313,6289 \cdot (-0,25 \cdot C_1 + 4,386294361 \cdot C_2 + 2 \cdot C_3 + 0,00142734375 + \\ + (0,04 \cdot C_1 + 0,3818070978 \cdot C_2 + 0,32 \cdot C_3 + 0,00007612499999)) = 0$$

$$-1313,6289 \cdot (-0,21 \cdot C_1 + 4,768101459 \cdot C_2 + 2,32 \cdot C_3 + 0,00150346875) = 0$$

$$275,862069 \cdot C_1 - 6263,515875 \cdot C_2 - 3047,619048 \cdot C_3 - 1,975 = 0$$

$$\begin{cases} 2,079441542 \cdot C_1 + 133,0842587 \cdot C_2 + 64,0 \cdot C_3 + C_4 + 0,1218 = 0 \\ 0,125 \cdot C_1 + 41,27106467 \cdot C_2 + 16,0 \cdot C_3 + 0,06089999999 = 0 \\ 0,6931471806 \cdot C_1 + 2,772588722 \cdot C_2 + 4,0 \cdot C_3 + C_4 + 0,0004757812499 = 0 \\ 275,862069 \cdot C_1 - 6263,515875 \cdot C_2 - 3047,619048 \cdot C_3 - 1,975 = 0 \end{cases}$$

Otrzymane wyniki:

$$\begin{cases} C_1 = -0,007317123728 \\ C_2 = -0,0046520299491 \\ C_3 = 0,0082505543345 \\ C_4 = -0,0155079891345 \end{cases}$$

I. Wyznaczenie wzoru na ugięcie $w(r)$:

$$w(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{q}{64D} r^4$$

Podstawiając do wzoru:

$$w(r) = -0,007317123728 \cdot \ln r - 0,0046520299491 \cdot r^2 \cdot \ln r + 0,0082505543345 \cdot r^2 + \\ - 0,0155079891345 + 0,00002973632812r^4$$

Wykres ugięcia, dla połowy płyty:

r [m]	w [m]
2	0,000000
2,2	0,001599
2,4	0,003137
2,6	0,004584
2,8	0,005918
3	0,007120
3,2	0,008176
3,4	0,009076
3,6	0,009813
3,8	0,010383
4	0,010784
4,2	0,011019
4,4	0,011089
4,6	0,011001
4,8	0,010764
5	0,010386
5,2	0,009879
5,4	0,009258
5,6	0,008537
5,8	0,007735
6	0,006868
6,2	0,005959
6,4	0,005029
6,6	0,004102
6,8	0,003203
7	0,002358
7,2	0,001597
7,4	0,000949
7,6	0,000445
7,8	0,000117
8	0,000000

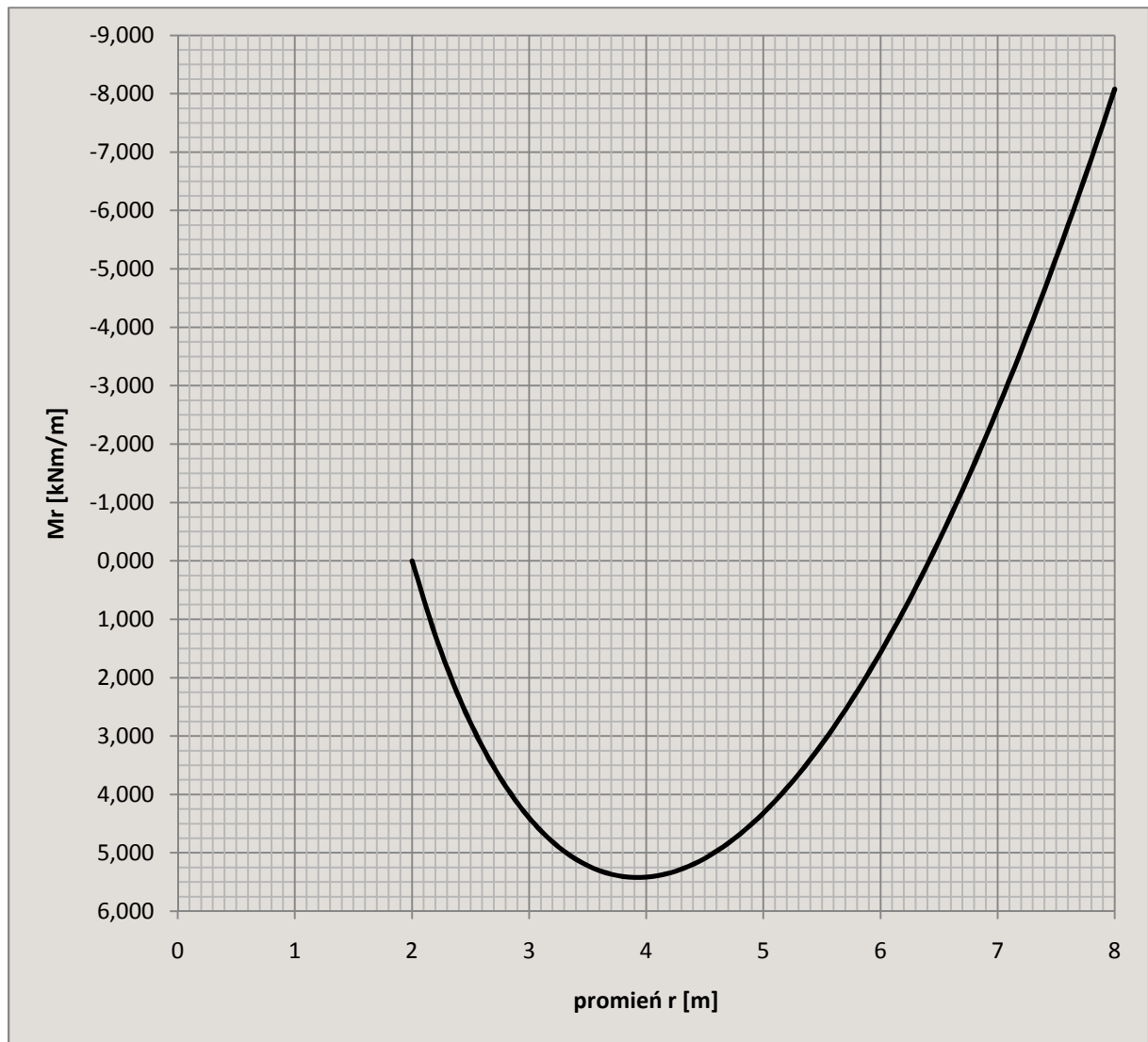


Moment promieniowy M_r :

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \\
 &= -1313,6289 \cdot \left(-\frac{(-0,007317123728)}{r^2} + 2 \cdot (-0,0046520299491) \cdot \ln r + 3 \cdot (-0,0046520299491) + \right. \\
 &+ 2 \cdot (0,0082505543345) + 0,0003568359375 \cdot r^2 + \frac{0,16}{r} \cdot \left(\frac{(-0,007317123728)}{r} + \right. \\
 &+ 2 \cdot (-0,0046520299491) \cdot r \cdot \ln r + (-0,0046520299491) \cdot r + 2 \cdot (0,0082505543345) \cdot r + \\
 &+ 0,0001189453125 \cdot r^3 \left. \right) \left. \right) = \\
 &= -1313,62 \cdot \left(\frac{0,006146383932}{r^2} - 0,01079270948 \cdot \ln r + 0,0003758671875 \cdot r^2 + 0,004440871415 \right) = \\
 &= -\frac{8,074067564}{r^2} + 14,17761508 \cdot \ln r - 0,4937500001 \cdot r^2 - 5,833657032
 \end{aligned}$$

Wykres momentu M_r , dla połowy płyty:

r [m]	Mr [kNm]
2	0,000000
2,2	1,286842
2,4	2,332654
2,6	3,181078
2,8	3,863035
3	4,401176
3,2	4,812564
3,4	5,110361
3,6	5,304931
3,8	5,404578
4	5,416062
4,2	5,344955
4,4	5,195913
4,6	4,972860
4,8	4,679139
5	4,317621
5,2	3,890793
5,4	3,400820
5,6	2,849601
5,8	2,238812
6	1,569939
6,2	0,844307
6,4	0,063101
6,6	-0,772615
6,8	-1,661878
7	-2,603819
7,2	-3,597646
7,4	-4,642639
7,6	-5,738138
7,8	-6,883541
8	-8,078293

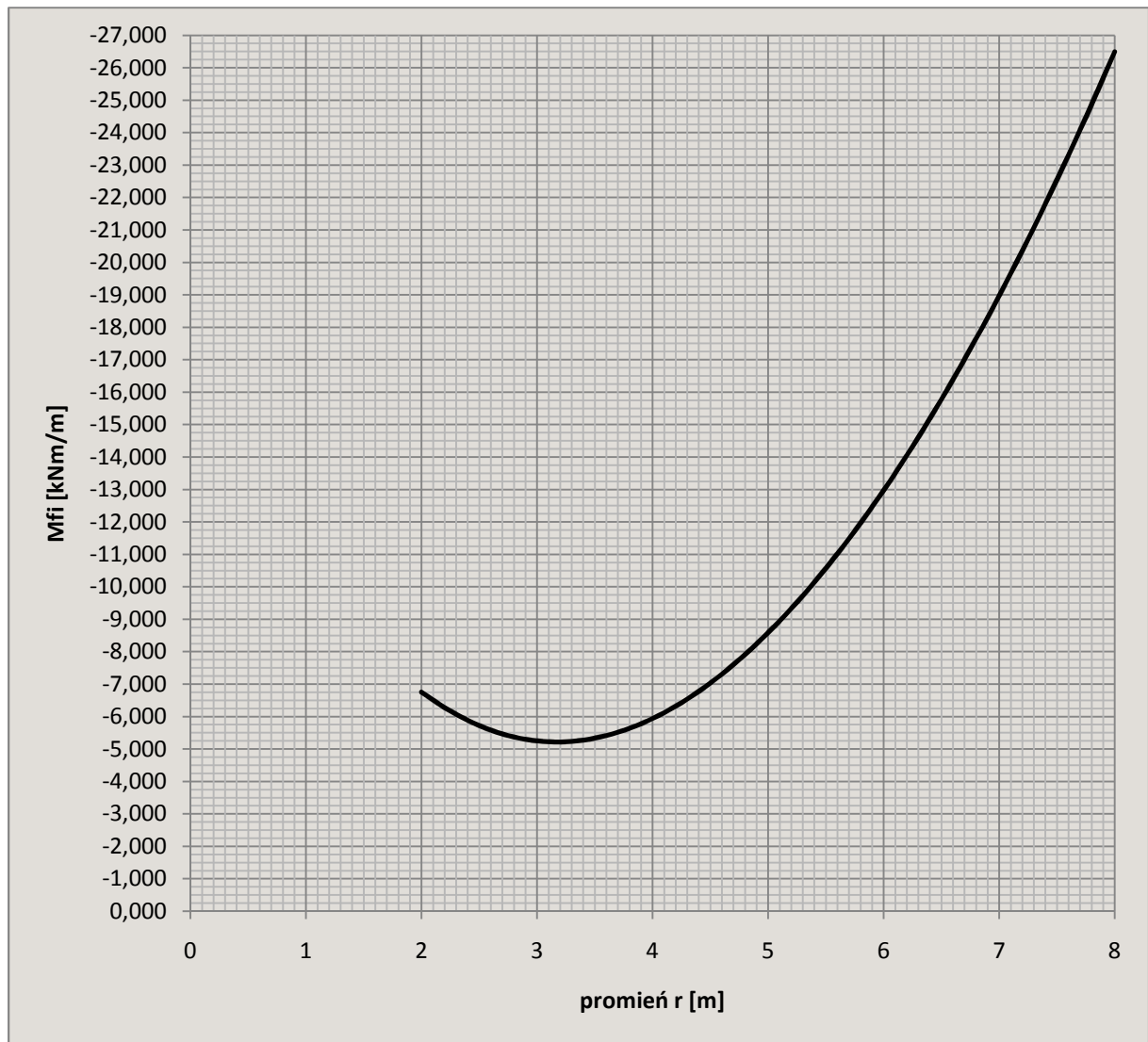


Moment obwodowy M_φ :

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = \\
 &= -1313,6289 \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{(-0,007317123728)}{r} + 2 \cdot (-0,0046520299491) \cdot r \cdot \ln r + (-0,0046520299491) \cdot r + \right. \right. \\
 &\quad + 2 \cdot (0,0082505543345) \cdot r + 0,0001189453125 \cdot r^3 + 0,16 \cdot \left(-\frac{(-0,007317123728)}{r^2} + \right. \\
 &\quad + 2 \cdot (-0,0046520299491) \cdot \ln r + 3 \cdot (-0,0046520299491) + 2 \cdot (0,0082505543345) \cdot r + \\
 &\quad \left. \left. + 0,0003568359375 \cdot r^2 \right) \right) = \\
 &= -1313,62 \cdot \left(-\frac{0,006146383932}{r^2} - 0,01079270948 \cdot \ln r + 0,00047578125 \cdot r^2 + 0,01225628173 \right) = \\
 &= \frac{8,074067564}{r^2} + 14,17761508 \cdot \ln r - 0,6250000001 \cdot r^2 - 16,10020589
 \end{aligned}$$

Wykres momentu M_φ , dla połowy płyty:

r [m]	Mfi [kNm]
2	-6,754515
2,2	-6,278565
2,4	-5,886399
2,6	-5,583944
2,8	-5,372803
3	-5,252385
3,2	-5,221018
3,4	-5,276540
3,6	-5,416620
3,8	-5,638929
4	-5,941229
4,2	-6,321416
4,4	-6,777538
4,6	-7,307795
4,8	-7,910536
5	-8,584252
5,2	-9,327561
5,4	-10,139202
5,6	-11,018020
5,8	-11,962959
6	-12,973050
6,2	-14,047405
6,4	-15,185207
6,6	-16,385704
6,8	-17,648203
7	-18,972064
7,2	-20,356695
7,4	-21,801548
7,6	-23,306114
7,8	-24,869920
8	-26,492527



Siła poprzeczna Q_r :

$$\begin{aligned}
 Q_r &= -D \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \\
 &= -1313,6289 \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(-\frac{(-0,007317123728)}{r^2} + 2 \cdot (-0,0046520299491) \cdot \ln r + 3 \cdot (-0,0046520299491) + \right. \\
 &+ 2 \cdot (0,0082505543345) + 0,0003568359375 \cdot r^2 + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{(-0,007317123728)}{r} + \right. \\
 &+ 2 \cdot (-0,0046520299491) \cdot r \cdot \ln r + (-0,0046520299491) \cdot r + 2 \cdot (0,0082505543345) \cdot r + \\
 &\left. \left. + 0,0001189453125 \cdot r^3 \right) \right) = \\
 &= -1313,62 \cdot \left(-0,0186081198 \cdot \ln r + 0,00047578125 \cdot r^2 + 0,01439409754 \right) = \\
 &= -1313,62 \cdot \left(-0,0186081198 \cdot \frac{1}{r} + 0,0009515625 \cdot r \right) = \\
 &= 24,44416394 \cdot \frac{1}{r} - 1,25 \cdot r
 \end{aligned}$$

Wykres siły poprzecznej Q_r , dla połowy płyty:

r [m]	Q_r [kNm]
2	9,722082
2,2	8,360984
2,4	7,185068
2,6	6,151602
2,8	5,230059
3	4,398055
3,2	3,638801
3,4	2,939460
3,6	2,290046
3,8	1,682675
4	1,111041
4,2	0,570039
4,4	0,055492
4,6	-0,436051
4,8	-0,907466
5	-1,361167
5,2	-1,799199
5,4	-2,223303
5,6	-2,634971
5,8	-3,035489
6	-3,425973
6,2	-3,807393
6,4	-4,180599
6,6	-4,546339
6,8	-4,905270
7	-5,257977
7,2	-5,604977
7,4	-5,946735
7,6	-6,283663
7,8	-6,616133
8	-6,944480

