

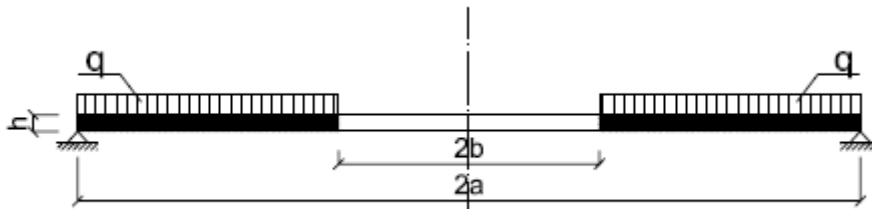
Ćwiczenie nr 2: Obliczanie układów osiowo-symetrycznych

Teoria sprężystości i plastyczności

Magdalena Krokowska
Grupa KBI III
2010/2011

Dla zadanego schematu statycznego i obciążenia płyty kołowej wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych M_r , M_ϕ , i Q_r oraz przemieszczenia w . Do obliczeń przyjąć wartości stałych materiałowych: $E=205 \text{ GPa}$, $\nu=0,3$.

1. Schemat statyczny płyty:



Rysunek 1 Schemat statyczny płyty.

$$a=6,00 \text{ m}$$

$$b=2,00 \text{ m}$$

$$h=0,025 \text{ m}$$

$$q=1,50 \text{ kN/m}^2$$

$$E=205,00 \text{ GPa}$$

$$\nu=0,30$$

2. Przyjęte równania do określenia przemieszczeń w postaci ugięcia i jego pochodne:

2.1. Funkcja ugięcia:

$$w(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2 \cdot r^2 \cdot \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 + \frac{q \cdot r^4}{64D}$$

2.2. Pochodne funkcji ugięcia:

$$w'(r) = C_1 \cdot \frac{1}{r} + 2 \cdot r \cdot C_2 \cdot \ln r + C_2 \cdot r + 2 \cdot C_3 \cdot r + \frac{q \cdot r^3}{16D}$$

$$w''(r) = -C_1 \cdot \frac{1}{r^2} + 2C_2 \cdot \ln r + 3C_2 + 2C_3 + 3 \frac{q \cdot r^2}{16D}$$

3. Sztywność płyty:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

$$D = \frac{205,00 \cdot 10^6 \cdot 0,025^3}{12 \cdot (1 - 0,30^2)} = 293,326 \text{ kNm}$$

4. Warunki brzegowe:

- 1) $w(a = 6,00) = 0$
- 2) $M_r(a = 6,00) = 0$
- 3) $M_r(b = 2,00) = 0$
- 4) $Q_r(b = 2,00) = 0$

5. Stałe C całkowania:

$$\underline{w(a = 6,00) = 0}$$

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \ln 6 + C_2 \cdot 6^2 \cdot \ln 6 + C_3 \cdot 6^2 + C_4 + \frac{1,5 \cdot 6^4}{64 \cdot 293,326} \\ = 1,79176C_1 + 64,50334C_2 + 36,00000C_3 + C_4 + 0,10355 = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{M_r(a = 6,00) = 0}$$

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) \right) \\ &= -D \left(\left(-C_1 \cdot \frac{1}{r^2} + 2C_2 \cdot \ln r + 3C_2 + 2C_3 + 3 \frac{q \cdot r^2}{16D} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{r} \left(C_1 \cdot \frac{1}{r} + 2 \cdot r \cdot C_2 \cdot \ln r + C_2 \cdot r + 2 \cdot C_3 \cdot r + \frac{q \cdot r^3}{16D} \right) \right) \\ &= -293,326 \left(\left(-C_1 \cdot \frac{1}{6^2} + 2C_2 \cdot \ln 6 + 3C_2 + 2C_3 + 3 \frac{1,5 \cdot 6^2}{16 \cdot 293,326} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,3}{6} \left(C_1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 6 \cdot C_2 \cdot \ln 6 + C_2 \cdot 6 + 2 \cdot C_3 \cdot 6 + \frac{1,5 \cdot 6^3}{16 \cdot 293,326} \right) \right) \\ &= 5,70519C_1 - 2334,45555C_2 - 762,64760C_3 - 11,13759 = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{M_r(b = 2,00) = 0}$$

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) \right) \\ &= -D \left(\left(-C_1 \cdot \frac{1}{r^2} + 2C_2 \cdot \ln r + 3C_2 + 2C_3 + 3 \frac{q \cdot r^2}{16D} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{r} \left(C_1 \cdot \frac{1}{r} + 2 \cdot r \cdot C_2 \cdot \ln r + C_2 \cdot r + 2 \cdot C_3 \cdot r + \frac{q \cdot r^3}{16D} \right) \right) \\ &= -293,326 \left(\left(-C_1 \cdot \frac{1}{2^2} + 2C_2 \cdot \ln 2 + 3C_2 + 2C_3 + 3 \frac{1,5 \cdot 2^2}{16 \cdot 293,326} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,3}{2} \left(C_1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot C_2 \cdot \ln 2 + C_2 \cdot 2 + 2 \cdot C_3 \cdot 2 + \frac{1,5 \cdot 2^3}{16 \cdot 293,326} \right) \right) \\ &= 51,33205C_1 - 1496,60205C_2 - 762,64760C_3 - 1,23779 = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{Q_r(b = 2,00) = 0}$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -D \frac{d}{dr} \left(\left(r - C_1 \cdot \frac{1}{r^2} + 2C_2 \cdot \ln r + 3C_2 + 2C_3 + 3 \frac{q \cdot r^2}{16D} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r} \left(C_1 \cdot \frac{1}{r} + 2 \cdot r \cdot C_2 \cdot \ln r + C_2 \cdot r + 2 \cdot C_3 \cdot r + \frac{q \cdot r^3}{16D} \right) \right) = -\frac{DC_2}{r} - \frac{qr}{2} \\
& \Rightarrow C_2 = -\frac{qr^2}{8D} = -\frac{1,5 \cdot 2^2}{8 \cdot 293,326} = -0,00256
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1,79176C_1 + 64,50334C_2 + 36,00000C_3 + C_4 + 0,10355 = 0 \\ 5,70519C_1 - 2334,45555C_2 - 762,64760C_3 - 11,13759 = 0 \\ 51,33205C_1 - 1496,60205C_2 - 762,64760C_3 - 1,23779 = 0 \\ C_2 = -0,00256 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -0,16996 \\ C_2 = -0,00256 \\ C_3 = -8,03913 \cdot 10^{-3} \\ C_4 = 0,65555 \end{cases}$$

6. Ugięcie oraz siły wewnętrzne:

6.1. Ugięcie:

$$\begin{aligned}
w(r) &= -0,16996 \cdot \ln r - 0,00256 \cdot r^2 \cdot \ln r - 8,03913 \cdot 10^{-3} \cdot r^2 + 0,65555 + \frac{1,5 \cdot r^4}{64 \cdot 293,326} \\
&= -0,16996 \cdot \ln r - 0,00256 \cdot r^2 \cdot \ln r - 8,03913 \cdot 10^{-3} \cdot r^2 + 0,65555 \\
&\quad + 7,99026 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

6.2. Moment promieniowy:

$$\begin{aligned}
M_r &= -D \left(w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) \right) \\
M_r &= -D \left[\frac{1}{r^2} (\nu - 1)C_1 + (2\ln r + 3 + 2\nu\ln r + \nu)C_2 + 2(1 + \nu)C_3 + \frac{qr^2}{16D} (3 + \nu) \right] \\
&= -293,326 \left[\frac{1}{r^2} (0,3 - 1) \cdot (-0,16996) + (2\ln r + 3 + 2 \cdot 0,3 \cdot \ln r + 0,3) \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,00256) + 2(1 + 0,3) \cdot (-8,03913 \cdot 10^{-3}) + \frac{1,5r^2}{16 \cdot 293,326} (3 + 0,3) \right] \\
&= \frac{-34,89699}{r^2} + 1,95228\ln r + 8,60852 - 0,30937r^2
\end{aligned}$$

6.3. Moment obwodowy:

$$\begin{aligned}
M_\varphi &= -D \left(\frac{1}{r} w'(r) + \nu w''(r) \right) \\
M_\varphi &= -D \left[\frac{1}{r^2} (1 - \nu)C_1 + (2\ln r + 2\nu\ln r + 1 + 3\nu)C_2 + 2(1 + \nu)C_3 + \frac{qr^2}{16D} (1 + 3\nu) \right] \\
&= -293,326 \left[\frac{1}{r^2} (1 - 0,3) \cdot (-0,16996) + (2\ln r + 2\nu\ln r + 1 + 3\nu) \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,00256) + 2(1 + \nu) \cdot (-8,03913 \cdot 10^{-3}) + \frac{1,5r^2}{16 \cdot 293,326} (1 + 3 \cdot 0,3) \right] \\
&= \frac{34,89699}{r^2} + 1,95228\ln r + 7,55608 - 0,17812r^2
\end{aligned}$$

6.4. Siła poprzeczna:

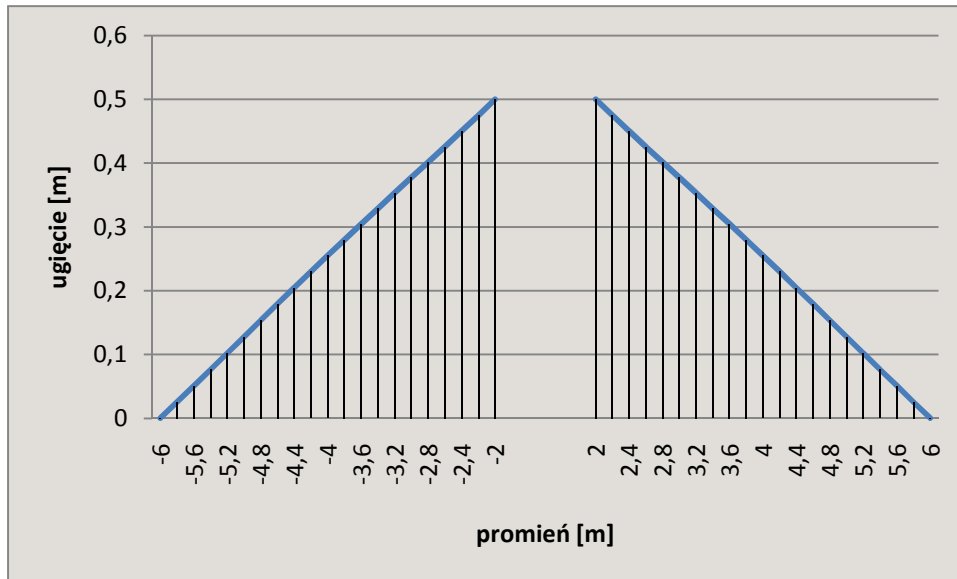
$$Q_{rz} = -D \frac{d}{dr} (w''(r) + w'(r))$$

$$Q_{rz} = -D \frac{d}{dr} \left(r - C_1 \cdot \frac{1}{r^2} + 2C_2 \cdot \ln r + 3C_2 + 2C_3 + 3 \frac{q \cdot r^2}{16D} \right) + \frac{1}{r} \left(C_1 \cdot \frac{1}{r} + 2 \cdot r \cdot C_2 \cdot \ln r + C_2 \cdot r + 2 \cdot C_3 \cdot r + \frac{q \cdot r^3}{16D} \right) = -\frac{DC_2}{r} - \frac{qr}{2} = 3,00366 \cdot \frac{1}{r} - 0,75r$$

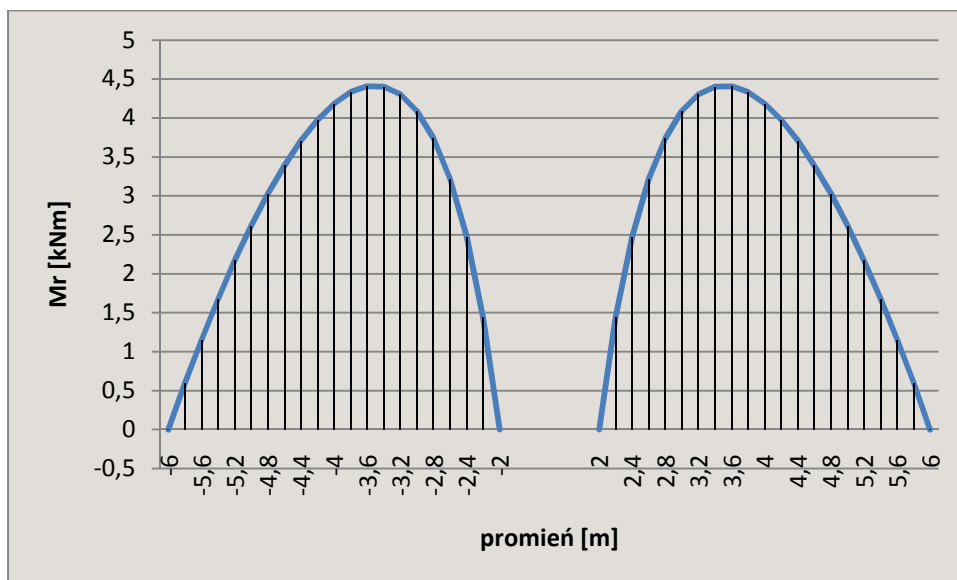
Wartości sił oraz ich wykresy określono za pomocą programu *Microsoft Excel*. Promień tarczy do obliczeń podzielono na odcinki długości 0,20 m.

L. p.	r [m]	w [m]	Mr [kNm]	Mφ [kNm]	Qr [kN]
1.	2	0,499768	9,878E-06	25,645382	0,00183
2.	2,2	0,474739	1,4403368	24,095616	-0,2847
3.	2,4	0,450195	2,4772037	22,779769	-0,54848
4.	2,6	0,425927	3,2203281	21,639429	-0,79475
5.	2,8	0,401781	3,7420179	20,633038	-1,02726
6.	3	0,377646	4,0915455	19,730239	-1,24878
7.	3,2	0,353438	4,3034581	18,908353	-1,46136
8.	3,4	0,3291	4,4025843	18,150108	-1,66657
9.	3,6	0,304594	4,4071573	17,442123	-1,86565
10.	3,8	0,279899	4,330824	16,773875	-2,05956
11.	4	0,255007	4,1839729	16,136981	-2,24909
12.	4,2	0,22992	3,9746326	15,524681	-2,43484
13.	4,4	0,204653	3,7090932	14,931466	-2,61735
14.	4,6	0,179227	3,3923439	14,352805	-2,79703
15.	4,8	0,153673	3,0283864	13,784936	-2,97424
16.	5	0,128028	2,6204638	13,224712	-3,14927
17.	5,2	0,102335	2,1712293	12,669483	-3,32237
18.	5,4	0,076644	1,682872	12,116998	-3,49377
19.	5,6	0,051011	1,1572129	11,565337	-3,66363
20.	5,8	0,025496	0,5957781	11,012852	-3,83213
21.	6	0,000165	-0,000145	10,45812	-3,99939

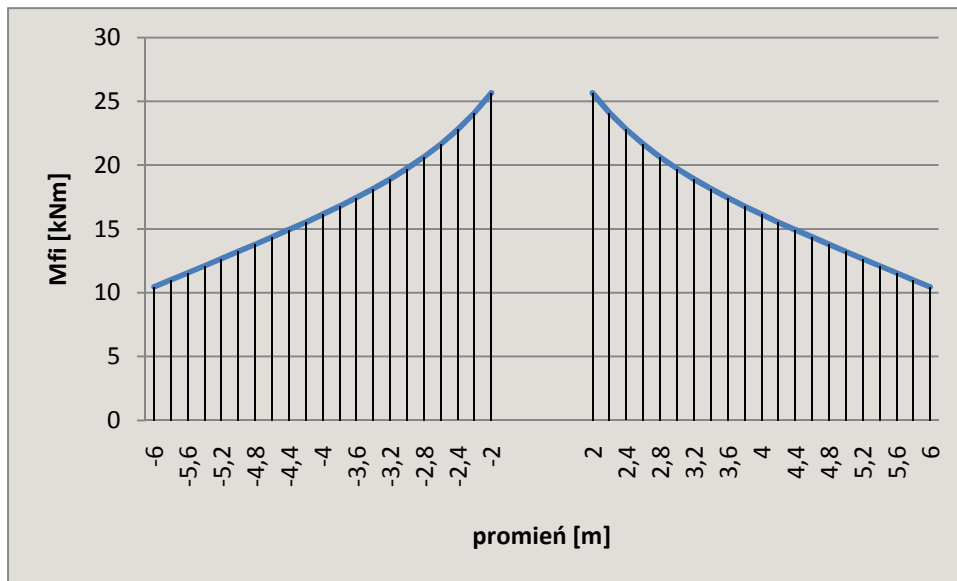
Tabela 1 Wartości ugięcia oraz sił wewnętrznych płyty kołowej.



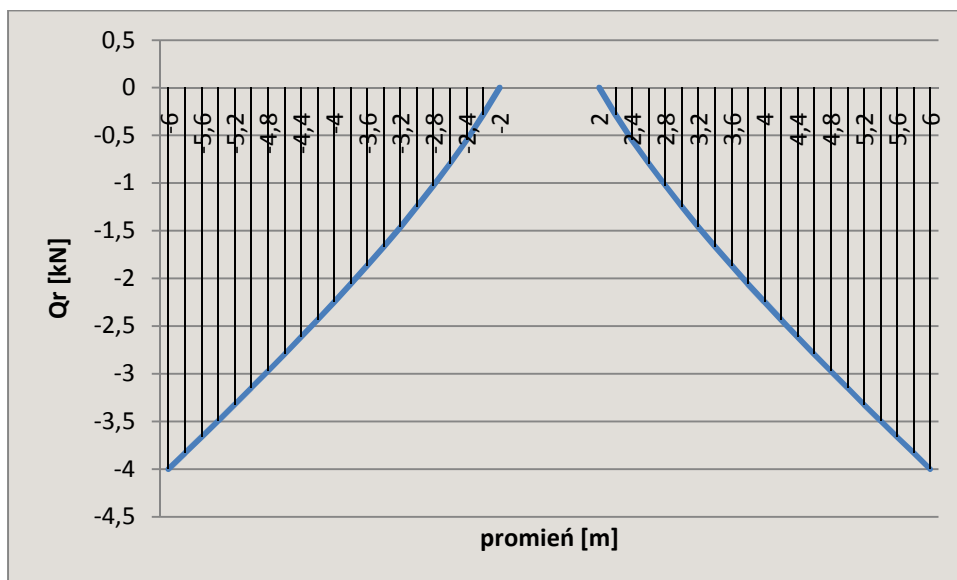
Wykres 1 Ugięcia płyty.



Wykres 2 Promieniowy moment zginający w płycie kołowej.



Wykres 3 Obwodowy moment zginający w płycie kołowej.



Wykres 4 Siła poprzeczna w płycie kołowej.