

# Ćwiczenie nr 3: Wyznaczanie nośności granicznej belek

Teoria sprężystości i plastyczności

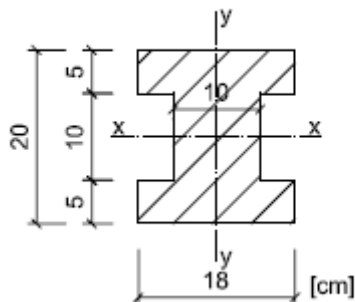
Magdalena Krokowska  
KBI III  
2010/2011

**Wyznaczyć zakres strefy sprężystej dla belki o zadanym przekroju poprzecznym i schemacie statycznym. Do obliczeń należy przyjąć  $\sigma_0 = 200 \text{ MPa}$ .**

1. Charakterystyki geometryczne przekrojów:

1.1. Przekrój dwuteowy:

- Schemat przekroju poprzecznego:



Rysunek 1 Dwuteowy przekrój poprzeczny belki.

- Pole powierzchni przekroju:

$$A = 2 \cdot 18,00 \cdot 5,00 + 10,00 \cdot 10,00 = 280,00 \text{ cm}^2$$

dla połowy przekroju:

$$\frac{A}{2} = 280,00 : 2 = 140,00 \text{ cm}^2$$

- Moment statyczny:

dla połowy przekroju:

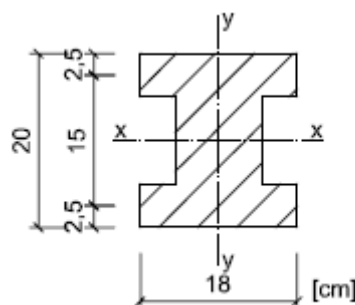
$$S_{x_1}^{A/2} = 18,00 \cdot 5,00 \cdot 2,50 + 10,00 \cdot 5,00 \cdot 2,50 = 350,00 \text{ cm}^3$$

- Odległość między środkami ciężkości połówek przekroju:

$$d = \frac{350,00}{140,00} = 2,50 \text{ cm}$$

$$\frac{e}{2} = 10,00 - 2,50 = 7,50 \text{ cm}$$

$$e = 2 \cdot 7,50 = 15,00 \text{ cm}$$



Rysunek 2 Odległość pomiędzy środkami ciężkości połówek przekroju.

- Moment bezwładności:

$$I_x = 2 \cdot \left( \frac{18,00 \cdot 5,00^2}{12} + 18,00 \cdot 5,00 \cdot 7,50^2 \right) + \frac{10,00 \cdot 10,00^3}{12} = 11333,333 \text{ cm}^4$$

- Wskaźnik wytrzymałości plastycznej:

$$W_{pl} = \frac{A}{2} \cdot e = 140,00 \cdot 15,00 = 2100,00 \text{ cm}^3$$

- Wskaźnik wytrzymałości sprężystej:

$$W_{spr} = \frac{I_x}{y_{max}}$$

$$y_{max} = 10,00 \text{ cm}$$

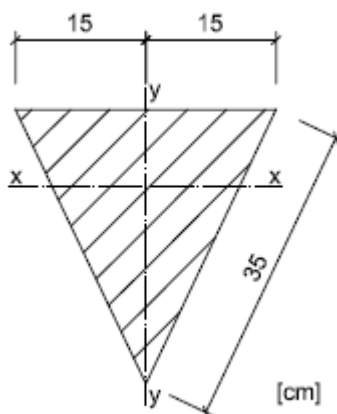
$$W_{spr} = \frac{11333,333}{10,00} = 1133,333 \text{ cm}^3$$

- Stosunek  $\frac{W_{pl}}{W_{spr}}$ :

$$\frac{W_{pl}}{W_{spr}} = \frac{2100,00}{1133,333} = 1,853$$

### 1.2. Przekrój trójkątny:

- Schemat przekroju poprzecznego:



Rysunek 3 Trójkątny przekrój poprzeczny belki.

- Pole powierzchni przekroju:

Wysokość przekroju:

$$\cos \alpha = \frac{15,00}{35,00} \Rightarrow \alpha \approx 64^\circ 37'$$

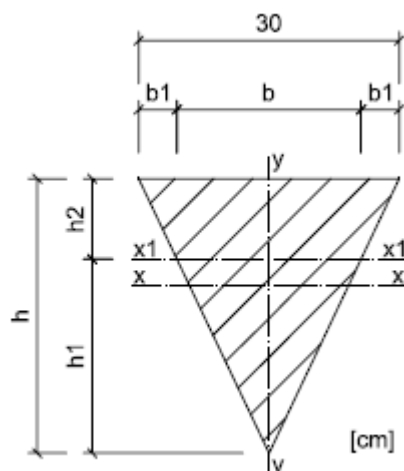
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{tg} \alpha = 15,00 \cdot \operatorname{tg} 64^\circ 37' = 31,62 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 15,00 \cdot 31,62 \right) = 474,30 \text{ cm}^2$$

Pole powierzchni dla połowy przekroju:

$$A = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 15,00 \cdot 31,62 \right) = 474,30 \text{ cm}^2$$

- Moment statyczny:



Rysunek 4 Wielkości geometryczne przekroju dla określenia momentu statycznego przekroju.

Moment statyczny dla połowy przekroju:

$$\frac{h_2}{b_1} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow h_2 = \operatorname{tg} \alpha b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{h_2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{h_2}{2,108}$$

$$b = 30,00 - 2b_1 = 30,00 - 2 \cdot \frac{h_2}{2,108} = 30,00 - 0,949h_2$$

$$A_d = \frac{A}{2} \text{ gdzie } A_d = 0,5(30,00 + b)h_2 = 0,5(30,00 + 30,00 - 0,949h_2)h_2 = 237,15 \text{ cm}^2$$

$$30,00h_2 - 0,474h_2^2 - 237,15 = 0$$

$$0,474h_2^2 - 30,00h_2 + 237,15 = 0 \Rightarrow h_2 = 9,26 \text{ cm lub } h_2 = 54,03 \text{ cm } (> h \Rightarrow \text{odpada})$$

$$h_1 = h - h_2 = 31,62 - 9,26 = 22,36 \text{ cm}$$

$$S_x^{A/2} = A_d \left( h_2 + \frac{h_1}{3} - \frac{h}{3} \right)$$

$$S_x^{A/2} = 237,15 \left( 9,26 + \frac{22,36}{3} - \frac{31,26}{3} \right) = 1492,46 \text{ cm}^3$$

- Moment bezwładności:

$$I_x = 2 \cdot \frac{15,00 \cdot 31,62^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 15,00 \cdot 31,62 \cdot 0 = 26345,373 \text{ cm}^4$$

- Wskaźnik wytrzymałości plastycznej:

$$W_{pl} = 2 \cdot S_x^{\frac{A}{2}} = 2 \cdot 1492,46 = 2984,928 \text{ cm}^3$$

- Wskaźnik wytrzymałości sprężystej:

$$W_{spr} = \frac{I_x}{y_{max}}$$

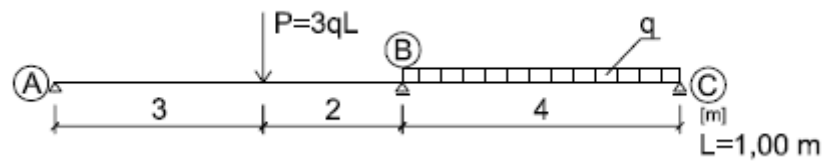
$$y_{max} = 10,00 \text{ cm}$$

$$W_{spr} = \frac{26345,373}{\frac{2}{3} \cdot 31,62} = 1249,780 \text{ cm}^3$$

- Stosunek  $\frac{W_{pl}}{W_{spr}}$ :

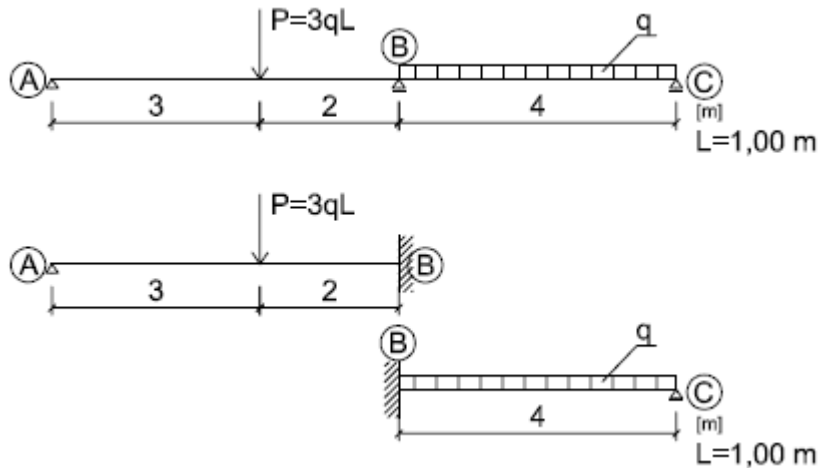
$$\frac{W_{pl}}{W_{spr}} = \frac{2984,928}{1249,780} = 2,388$$

2. Schemat statyczny belki:



Rysunek 5 Schemat statyczny belki.

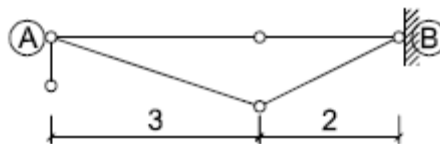
3. Podział belki na części:



Rysunek 6 Podział belki.

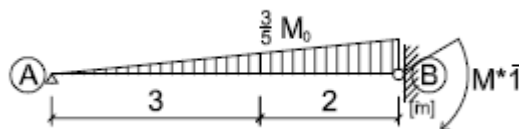
3.1. Belka nr 1:

Belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Do powstania mechanizmu niezbędne jest uplastycznienie belki w dwóch punktach (dwa przeguby).

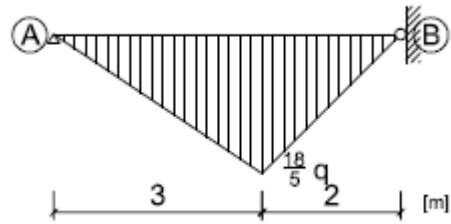


Rysunek 7 Schemat występowania przegubów plastycznych dla belki nr 1.

- Statycznie:



Rysunek 8 Wykres momentów zginających od przyłożonego momentu jednostkowego.

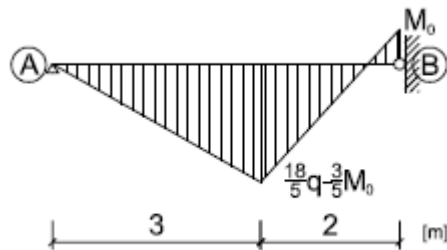


Rysunek 9 Wykres momentów zginających od przyłożonego obciążenia rzeczywistego.

$$R_A = \frac{6}{5}q$$

$$R_B = \frac{9}{5}q$$

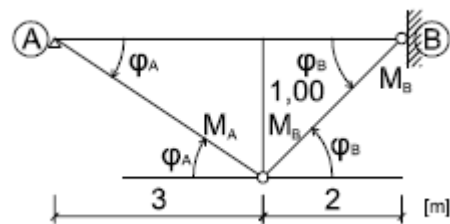
$$M = R_A \cdot 3,00 = \frac{6}{5}q \cdot 3,00 = \frac{18}{5}q$$



Rysunek 10 Wykres momentów zginających od momentu jednostkowego i obciążenia rzeczywistego.

$$\frac{18}{5}q - \frac{3}{5}M_0 = M_0 \Rightarrow q = \frac{4}{9}M_0$$

- Kinematycznie:



Rysunek 11 Przemieszczenia.

$$\varphi_A = \frac{1}{3}$$

$$\varphi_B = \frac{1}{2}$$

$$L_I = L_E$$

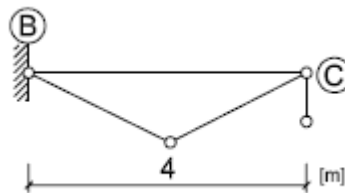
$$L_E = P \cdot 1 = 3qL \cdot 1,00 = 3q \cdot 1,00 \cdot 1,00 = 3q$$

$$L_i = M_0 \cdot \varphi_A + M_0 \cdot \varphi_B + M_0 \cdot \varphi_B = M_0 (\varphi_A + 2\varphi_B) = \frac{4}{3}M_0$$

$$L_i = L_E \Rightarrow 3q = \frac{4}{3}M_0 \Rightarrow q = \frac{4}{9}M_0$$

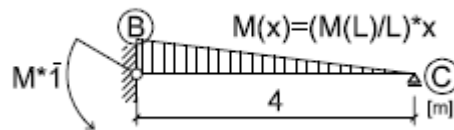
3.2. Belka nr 2:

Belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Do powstania mechanizmu niezbędne jest uplastycznienie belki w dwóch punktach (dwa przeguby).

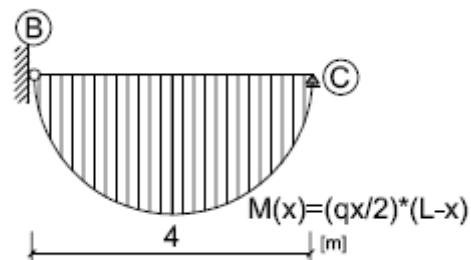


Rysunek 12 Schemat występowania przegubów plastycznych dla belki nr 2.

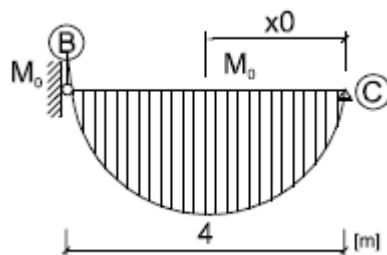
- Statycznie:



Rysunek 13 Wykres momentów zginających od przyłożonego momentu jednostkowego.



Rysunek 14 Wykres momentów zginających od przyłożonego obciążenia rzeczywistego.



Rysunek 15 Wykres momentów zginających od momentu jednostkowego i obciążenia rzeczywistego.

$$M(L) = M_0$$

$$M(x_0) = M_0$$

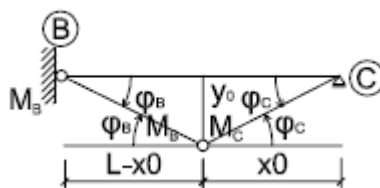
$$\begin{cases} M(x) = \frac{qx}{2}(L-x) - \frac{M(L)}{L} \cdot x \\ \frac{dM(x)}{dx} = \frac{qL}{2} - qx - \frac{M(L)}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0 = \frac{q_0 x_0}{2}(L-x_0) - \frac{M(L)}{L} \cdot x_0 \\ \frac{q_0 L}{2} - q_0 x_0 - \frac{M(L)}{L} = 0 \end{cases}$$

$$q_0 = \frac{2M_0}{L^2} (3 + 2\sqrt{2}) = \frac{M_0}{8} (3 + 2\sqrt{2})$$

$$x_0 = L(\sqrt{2} - 1) = 4(\sqrt{2} - 1) = 1,66 \text{ m}$$

- Kinematycznie:



Rysunek 16 Przemieszczenia.

$$\varphi_B = \frac{\dot{y}_0}{L-x_0}$$

$$\varphi_C = \frac{\dot{y}_0}{x_0}$$

$$dL_{\dot{E}} = \dot{y}_B \cdot q dx + \dot{y}_C \cdot q dx$$

$$L_{\dot{E}} = \int_0^{x_0} \dot{y}_B \cdot q dx + \int_{x_0}^L \dot{y}_C \cdot q dx = q \left[ \int_0^{x_0} \dot{y}_B dx + \int_{x_0}^L \dot{y}_C dx \right]$$

$$L_{\dot{E}} = q(0,5x_0 \cdot \dot{y}_0 + 0,5(L-x_0)\dot{y}_0) = 0,5qL\dot{y}_0$$



$$L_i = M_0 \cdot \varphi_C + M_0 \cdot \varphi_B + M_0 \cdot \varphi_B = M_0(2\varphi_B + \varphi_C)$$

$$L_i = M_0 \cdot \dot{\gamma}_0 \cdot \frac{L + x_0}{x_0(L - x_0)}$$

$$L_{\dot{E}} = L_i$$

$$0,5qL\dot{\gamma}_0 = M_0 \cdot \dot{\gamma}_0 \cdot \frac{L + x_0}{x_0(L - x_0)} \Rightarrow q = \frac{2M_0}{L} \cdot \frac{L + x_0}{x_0(L - x_0)}$$

$$\frac{dq}{dx} = 0 \Rightarrow x_0 = L(\sqrt{2} - 1) = 4(\sqrt{2} - 1) = 1,66 \text{ m}$$

3.3. Zestawienie otrzymanych wyników dla wartości obciążenia q:

Belka nr	Wartość q
1	0,444 M <sub>0</sub>
2	0,728 M <sub>0</sub>

Tabela 1 Wartości obciążenia q w zależności od wartości momentu granicznego M<sub>0</sub>.

4. Moment graniczny:

$$\sigma_0 = 200,00 \text{ MPa}$$

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_{pl}} \Rightarrow M_0 = \sigma_0 \cdot W_{pl}$$

Przekrój	Wartość W <sub>pl</sub> [cm <sup>3</sup> ]	Moment graniczny M <sub>0</sub> [kNm]
dwuteowy	2100,000	<b>420,000</b>
trójkątny	2984,928	<b>596,986</b>

Tabela 2 Wartości momentu granicznego dla poszczególnych przekrojów belki.

5. Wartość graniczna obciążenia:

5.1. Obciążenie ciągłe q:

Belka nr	Wartość q	Przekrój dwuteowy [kN/m] M <sub>0</sub> = 420,000 kNm	Przekrój trójkątny [kN/m] M <sub>0</sub> = 596,986 kNm
1	0,444 M <sub>0</sub>	<b>82,584</b>	<b>265,062</b>
2	0,728 M <sub>0</sub>	<b>305,760</b>	<b>434,606</b>

Tabela 3 Graniczne wartości obciążenia ciągłego q.

5.2. Siła skupiona P:

$$P = 3qL$$

$$L = 1,00 \text{ m}$$

Belka nr	Przekrój dwuteowy [kN]	Przekrój trójkątny [kN]
1	247,752	795,186
2	917,280	1303,818

Tabela 4 Graniczne wartości siły skupionej.

6. Zakres strefy sprężystej:

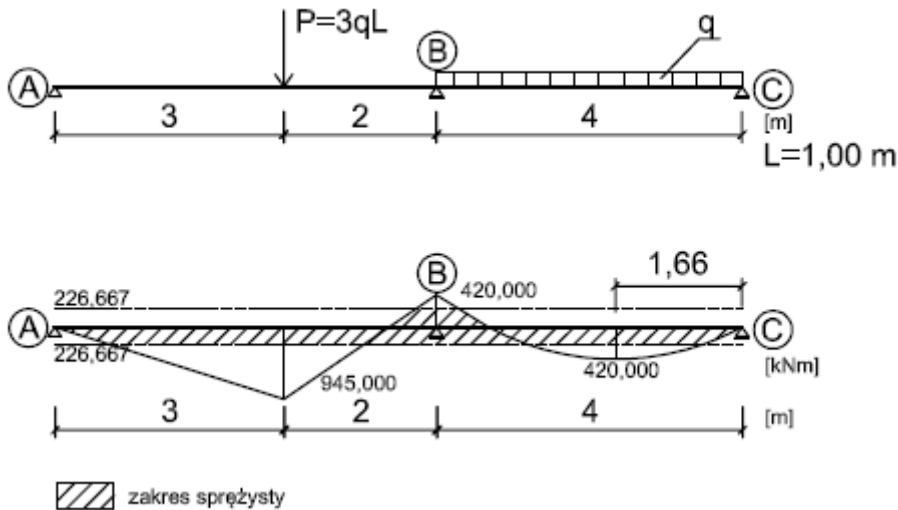
$$M_{spr} = \sigma_0 \cdot W_{spr}$$

$$\sigma_0 = 200,00 \text{ MPa}$$

Przekrój	Wartość $W_{spr}$ [cm <sup>3</sup> ]	Moment sprężysty $M_{spr}$ [kNm]
dwuteowy	1133,333	226,667
trójkątny	1249,780	249,956

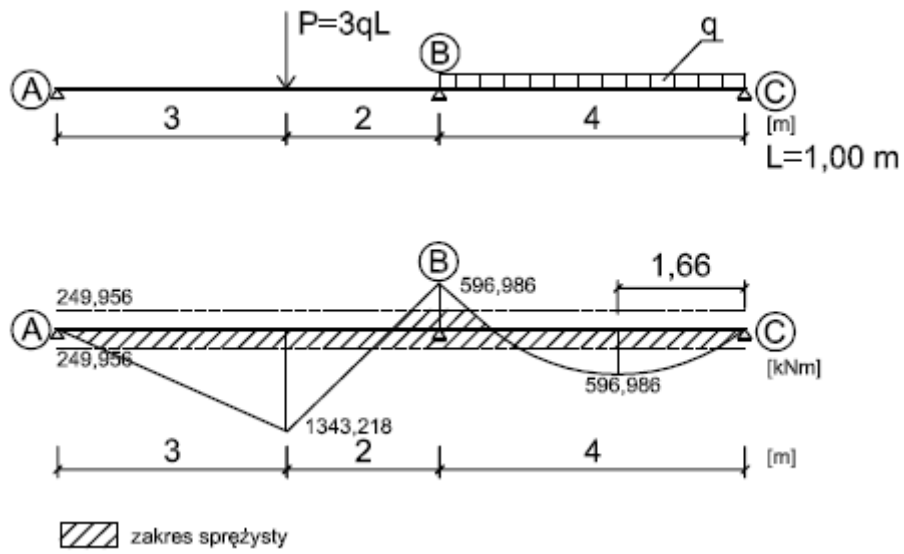
Tabela 5 Wartości momentu sprężystego dla poszczególnych przekrojów belki.

6.1. Dwuteowy przekrój poprzeczny belki:



Rysunek 17 Zakres strefy sprężystej dla belki o przekroju dwuteowym.

6.2. Trójkątny przekrój poprzeczny belki:



Rysunek 18 Zakres strefy sprężystej dla belki o przekroju trójkątnym.