



POLITECHNIKA POZNAŃSKA

WYDZIAŁ BUDOWNICTWA I INŻYNIERII ŚRODOWISKA

INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI

ĆWICZENIE PROJEKTOWE

**Obliczanie ram metodą przemieszczeń – wersja
komputerowa**

Damian Jakubowski

Studia niestacjonarne, TOB

Rok akad. 2018/2019

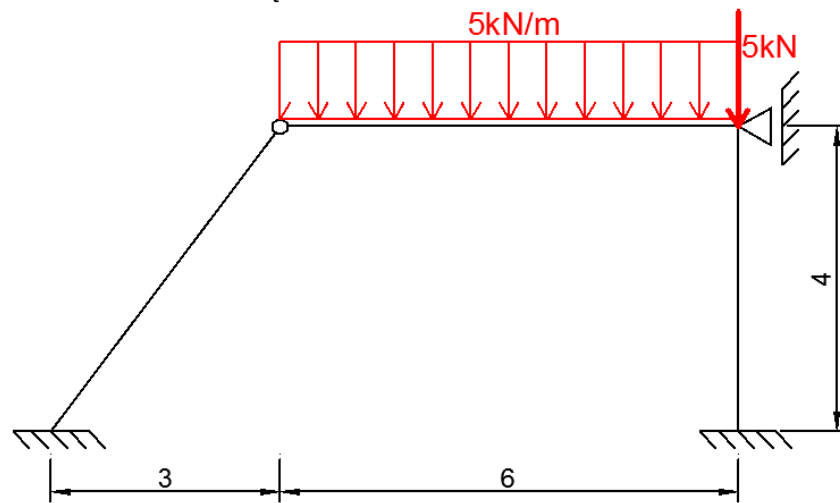
Prowadzący:

dr hab. inż. Michał Guminiak

Poznań, 2018

1. Dane wyjściowe

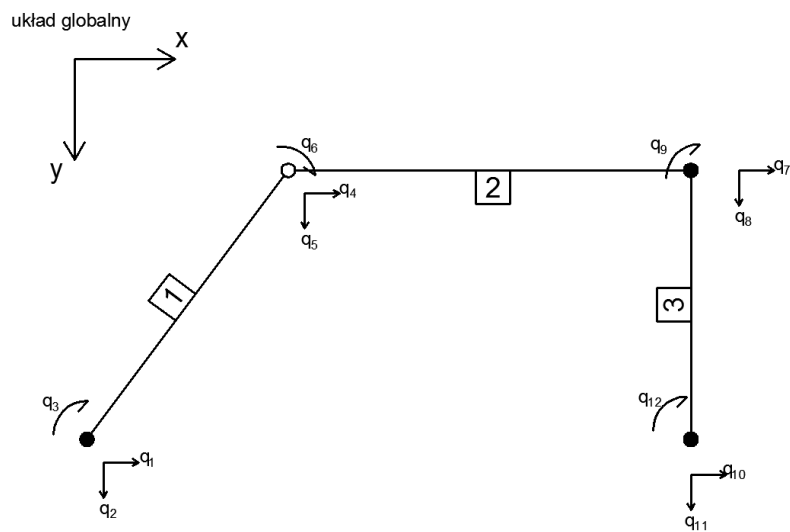
1.1. Schemat układu z obciążeniami:



1.2. Charakterystyki prętów (dobrano dwuteownik IPE 180):

$E = 210 \text{ GPa}$
 $A = 23,9 \text{ cm}^2$
 $I = 1320 \text{ cm}^4$

1.3. Oznaczenie prętów układu i określenie liczby niewiadomych



2. Macierze sztywności poszczególnych prętów

2.1. Wzory ogólne

$$K_{(e)} = T^T * \tilde{K}_{(e)} * T$$

gdzie:

$K_{(e)}$ – macierz sztywności dla układu globalnego
 $\tilde{K}_{(e)}$ – macierz sztywności dla układu lokalnego
 T – macierz transformacji

$$T = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

α - kąt między osią x globalnego układu współrzędnych a osią x układu lokalnego

macierz sztywności elementu prętowego:

- pręt obustronnie utwierdzony:

$$\widetilde{K}_{(e)} = \frac{1}{l^3} * \begin{bmatrix} EA l^2 & 0 & 0 & -EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI & 6EI l & 0 & -12EI & 6EI l \\ 0 & 6EI l & 4EI l^2 & 0 & -6EI l & 2EI l^2 \\ -EA l^2 & 0 & 0 & EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI & -6EI l & 0 & 12EI & -6EI l \\ 0 & 6EI l & 2EI l^2 & 0 & -6EI l & 4EI l^2 \end{bmatrix}$$

- pręt z przegubem na lewym końcu

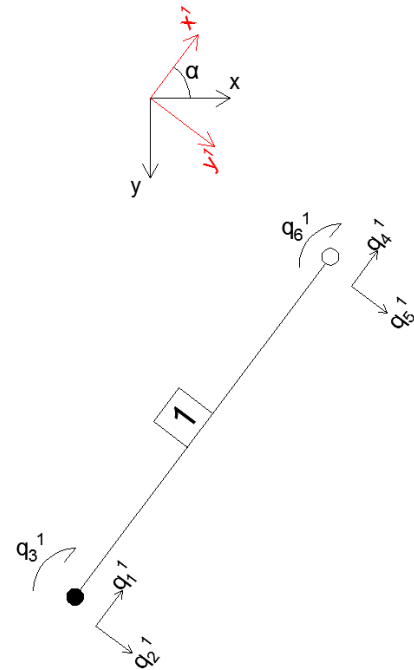
$$\widetilde{K}_{(e)} = \frac{1}{l^3} * \begin{bmatrix} EA l^2 & 0 & 0 & -EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI & 0 & 0 & -3EI & 3EI l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA l^2 & 0 & 0 & EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & 0 & 0 & 3EI & -3EI l \\ 0 & 3EI l & 0 & 0 & -3EI l & 3EI l^2 \end{bmatrix}$$

- pręt z przegubem na prawym końcu:

$$\widetilde{K}_{(e)} = \frac{1}{l^3} * \begin{bmatrix} EA l^2 & 0 & 0 & -EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI & 3EI l & 0 & -3EI & 0 \\ 0 & 3EI l & 3EI l^2 & 0 & -3EI l & 0 \\ -EA l^2 & 0 & 0 & EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & -3EI l & 0 & 3EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Pręt nr 1 - przegub po prawej stronie

$$\begin{aligned}
 I &= 1320 \text{ cm}^4 \\
 A &= 23,9 \text{ cm}^2 \\
 EI &= 2772 \text{ kNm}^2 \\
 EA &= 489950 \text{ kN} \\
 l &= 5 \text{ m} \\
 \sin(\alpha) &= -0,8 \\
 \cos(\alpha) &= 0,6
 \end{aligned}$$



$$\tilde{K}_{(1)} = \begin{bmatrix} 100380 & 0 & 0 & -100380 & 0 & 0 \\ 0 & 66,528 & 332,64 & 0 & -66,528 & 0 \\ 0 & 332,64 & 1663,2 & 0 & -332,64 & 0 \\ -100380 & 0 & 0 & 100380 & 0 & 0 \\ 0 & -66,528 & -332,64 & 0 & 66,528 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

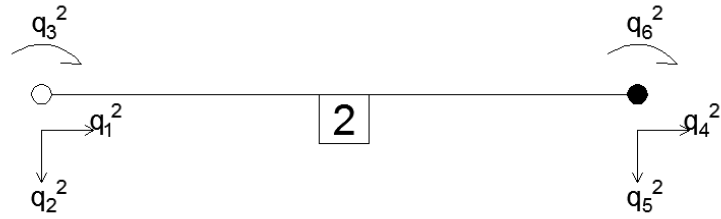
$$T = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^T = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 K_{(1)} &= T^T * \tilde{K}_{(1)} * T \\
 &= \begin{bmatrix} 36179,378 & -48150,467 & 266,112 & -36179,378 & 48150,467 & 0 \\ -48150,467 & 64267,150 & 199,584 & 48150,467 & -64267,150 & 0 \\ 266,112 & 199,584 & 1663,2 & -266,112 & -199,584 & 0 \\ -36179,378 & 48150,467 & -266,112 & 36179,378 & -48150,467 & 0 \\ 48150,467 & -64267,150 & -199,584 & -48150,467 & 64267,150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.3. Pręt nr 2 - przegub po lewej stronie.

$$\begin{aligned}
 I &= 1320 \text{ cm}^4 \\
 A &= 23,9 \text{ cm}^2 \\
 EI &= 2772 \text{ kNm}^2 \\
 EA &= 501900 \text{ kN} \\
 l &= 6 \text{ m} \\
 \sin(\alpha) &= 0 \\
 \cos(\alpha) &= 1
 \end{aligned}$$

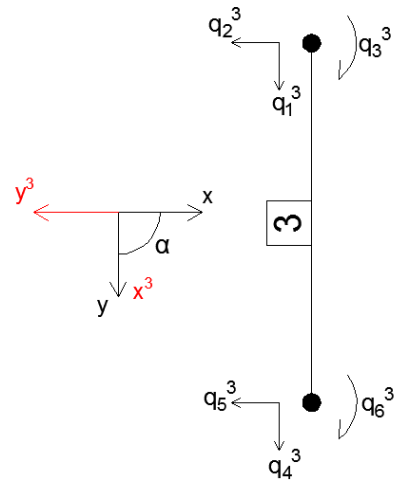


Układ lokalny pokrywa się z układem globalnym - macierz sztywności nie wymaga transformacji.

$$K_{(2)} = \widetilde{K}_{(2)} = \begin{bmatrix} 83650 & 0 & 0 & -83650 & 0 & 0 \\ 0 & 38,5 & 0 & 0 & -38,5 & 231 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -83650 & 0 & 0 & 83650 & 0 & 0 \\ 0 & -38,5 & 0 & 0 & 38,5 & -231 \\ 0 & 231 & 0 & 0 & -231 & 1386 \end{bmatrix}$$

2.4. Pręt nr 3 - obustronnie utwierdzony

$$\begin{aligned}
 I &= 1320 \text{ cm}^4 \\
 A &= 23,9 \text{ cm}^2 \\
 EI &= 2772 \text{ kNm}^2 \\
 EA &= 501900 \text{ kN} \\
 l &= 4,0 \text{ m} \\
 \sin(\alpha) &= -1 \\
 \cos(\alpha) &= 0
 \end{aligned}$$



$$\widetilde{K}_{(3)} = \begin{bmatrix} 125475 & 0 & 0 & -125475 & 0 & 0 \\ 0 & 519,75 & 1039,5 & 0 & -519,75 & 1039,5 \\ 0 & 1039,5 & 2772 & 0 & -1039,5 & 1386 \\ -125475 & 0 & 0 & 125475 & 0 & 0 \\ 0 & -519,75 & -1039,5 & 0 & 519,75 & -1039,5 \\ 0 & 1039,5 & 1386 & 0 & -1039,5 & 2772 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{(3)} = T^T * \tilde{K}_{(3)} * T = \begin{bmatrix} 519,75 & 0 & -1039,5 & -519,75 & 0 & -1039,5 \\ 0 & 125475 & 0 & 0 & -125475 & 0 \\ -1039,5 & 0 & 2772 & 1039,5 & 0 & 1386 \\ -519,75 & 0 & 1039,5 & 519,75 & 0 & 1039,5 \\ 0 & -125475 & 0 & 0 & 125475 & 0 \\ -1039,5 & 0 & 1386 & 1039,5 & 0 & 2772 \end{bmatrix}$$

3. Tabela powiązań

	Numer indeksu elementu macierzy					
Nr pręta	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12

4. Macierz sztywności całego układu po agregacji K:

<i>K</i>	
1	36179,378 -48150,467 266,112 -36179,378 48150,467 0 0 0 0 0 0 0
2	-48150,466 64267,150 199,584 48150,467 -64267,150 0 0 0 0 0 0 0
3	266,112 199,584 1663,2 -266,112 -199,584 0 0 0 0 0 0 0
4	-36179,378 48150,467 -266,112 119829,378 -48150,467 0 -83650 0 0 0 0 0
5	48150,467 -64267,150 -199,584 -48150,467 64305,650 0 0 -38,5 231 0 0 0
6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
7	0 0 0 -83650 0 0 84169,75 0 -1039,5 -519,75 0 -1039,5
8	0 0 0 0 -38,5 0 0 125436,5 -231 0 -125475 0
9	0 0 0 0 231 0 -1039,5 -231 4158 1039,5 0 1386
10	0 0 0 0 0 0 -519,75 0 1039,5 519,75 0 1039,5
11	0 0 0 0 0 0 0 125475 0 0 125475 0
12	0 0 0 0 0 0 -1039,5 0 1386 1039,5 0 2772

5. Obliczenie wektora sił P:

5.1. Wzory ogólne:

$$P = P_w - R^0$$

P_w - wektor zewnętrznych sił węzłowych układu.

R^0 - wektor sił przywęzłowych układu od obciążenia przęsłowego

5.2. Wektor sił dla pręta 1 (brak obciążenia):

$$\widetilde{R}_1^0 = R_1^0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor "0" nie wymaga transformacji

5.3. Wektor sił dla pręta nr 2

Na pręcie 2 obciążenie równomiernie rozłożone $q=5\text{kN/m}^2$ długość pręta $l=6$

$$\widetilde{R}_2^0 = R_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3ql}{8} \\ -\frac{ql^2}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5ql}{8} \\ -\frac{ql^2}{8} \\ \frac{ql^2}{8} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -12,25 \\ 0 \\ 0 \\ -18,75 \\ 22,5 \end{bmatrix}$$

5.4. Wektor sił dla pręta nr 3 (brak obciążenia przęsłowego)

$$\widetilde{R}_3^0 = R_3^0 = \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.5. Wektor sił przywęzłowych od obciążeń przęsłowych

$$R^0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11,25 \\ 0 \\ 0 \\ -18,75 \\ 22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.6. Wektor zewnętrznych sił obciążających węzły konstrukcji

$$P_w = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.7. Wektor sił P:

$$P = P_w - R^0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11,25 \\ 0 \\ 0 \\ -18,75 \\ 22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11,25 \\ 0 \\ 0 \\ 23,75 \\ -22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Redukcja wektora sił i macierzy sztywności ze względu na warunki podparcia.

Uwzględnienie warunków podparcia(wykreślenie wierszy oraz kolumn nr 1,2,3, 7,10,11,12 oraz redukcja kąta obrotu przy przegubie 6)

6.1. Wektor sił po redukcji

$$P = \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 11,25 \\ 23,75 \\ -22,5 \end{bmatrix}$$

6.2. Macierz sztywności po redukcji

$$K = \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 119829,378 & -48150,467 & 0 & 0 \\ -48150,467 & 64305,650 & -38,5 & 231 \\ 0 & -38,5 & 125436,5 & -231 \\ 0 & 231 & -231 & 4158 \end{bmatrix}$$

6.3. Równanie równowagi układu i wartości przemieszczeń

$$K * q = P$$

$$\begin{bmatrix} 119829,378 & -48150,467 & 0 & 0 \\ -48150,467 & 64305,650 & -38,5 & 231 \\ 0 & -38,5 & 125436,5 & -231 \\ 0 & 231 & -231 & 4158 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_8 \\ q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11,25 \\ 23,75 \\ -22,5 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_8 \\ q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000111796 \\ 0,000278222 \\ 0,000179339 \\ -0,005416749 \end{bmatrix}$$

6.4. Wektory przemieszczeń globalnych dla poszczególnych prętów.

$$\text{Pręt 1 } q_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,000111796 \\ 0,000278222 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Pręt 2 } q_{(2)} = \begin{bmatrix} 0,000111796 \\ 0,000278222 \\ 1 \\ 0 \\ 0,000179339 \\ -0,005416749 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pręt 3 } q_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,000179339 \\ -0,005416749 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.5. Wektory przemieszczeń lokalnych dla poszczególnych prętów.

$$\tilde{q}_e = T * q_e$$

gdzie:

\tilde{q}_e - wektor przemieszczeń lokalnych danego pręta

q_e - wektor przemieszczeń globalnych danego pręta

T - macierz transformacji

$$\text{Pręt 1 } \tilde{q}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,000155499 \\ 0,00025637 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Pręt 2 } \tilde{q}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0,000111796 \\ 0,000278222 \\ 1 \\ 0 \\ 0,000179339 \\ -0,005416749 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pręt 3 } \tilde{q}_{(3)} = \begin{bmatrix} 0,000179339 \\ 0 \\ -0,005416749 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W wektorze przemieszczeń globalnych i lokalnych w prętach 1 i 2 występuje niewiadoma powstała w wyniku redukcji statycznej dwóch prętów. Ponieważ nie wpływa ona na dalsze obliczenia w programach kalkulacyjnych wpisano liczbę 1.

7. Obliczeni wektorów sił węzłowych dla poszczególnych prętów.

$$\tilde{R}_e = \tilde{K}_e * \tilde{q}_e + \tilde{R}_e^0$$

\tilde{R}_e - wektor sił przywęzłowych

\tilde{K}_e - macierz sztywności elementu

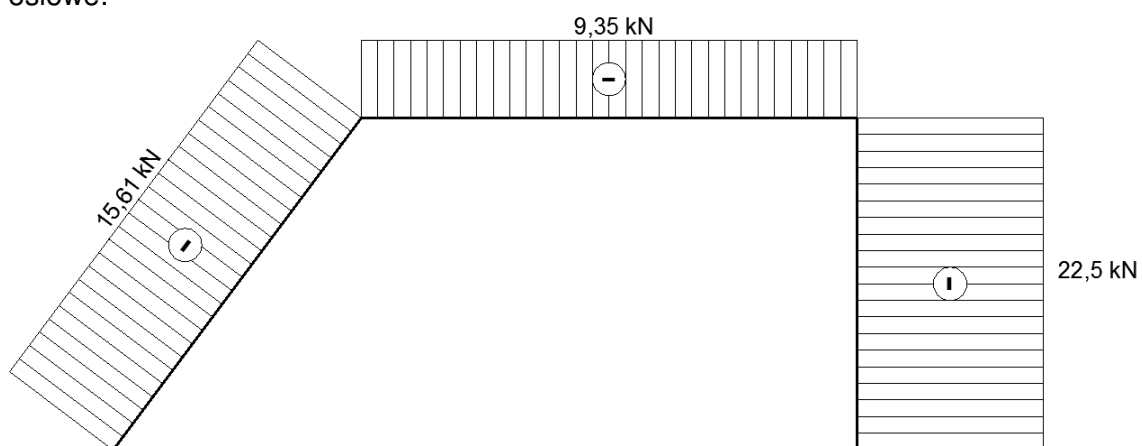
\tilde{q}_e - wektor przemieszczeń węzłów elementu

\tilde{R}_e^0 - wektor sił przywęzłowych od obciążenia przeszłowego

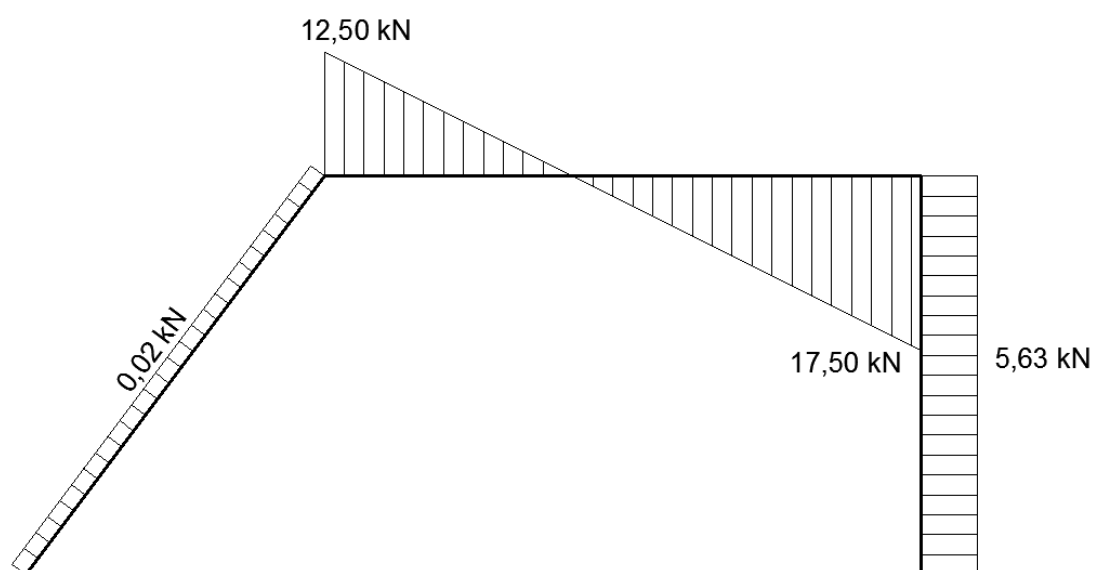
$$\tilde{R}_{(1)} = \begin{bmatrix} 15,61 \\ -0,02 \\ -0,09 \\ -15,61 \\ 0,02 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{R}_{(2)} = \begin{bmatrix} 9,35 \\ -12,50 \\ 0 \\ -9,35 \\ -17,50 \\ 15,02 \end{bmatrix} \quad \tilde{R}_{(3)} = \begin{bmatrix} 22,50 \\ -5,63 \\ -15,02 \\ -22,50 \\ 5,63 \\ -7,51 \end{bmatrix}$$

8. Wykresy sił wewnętrznych

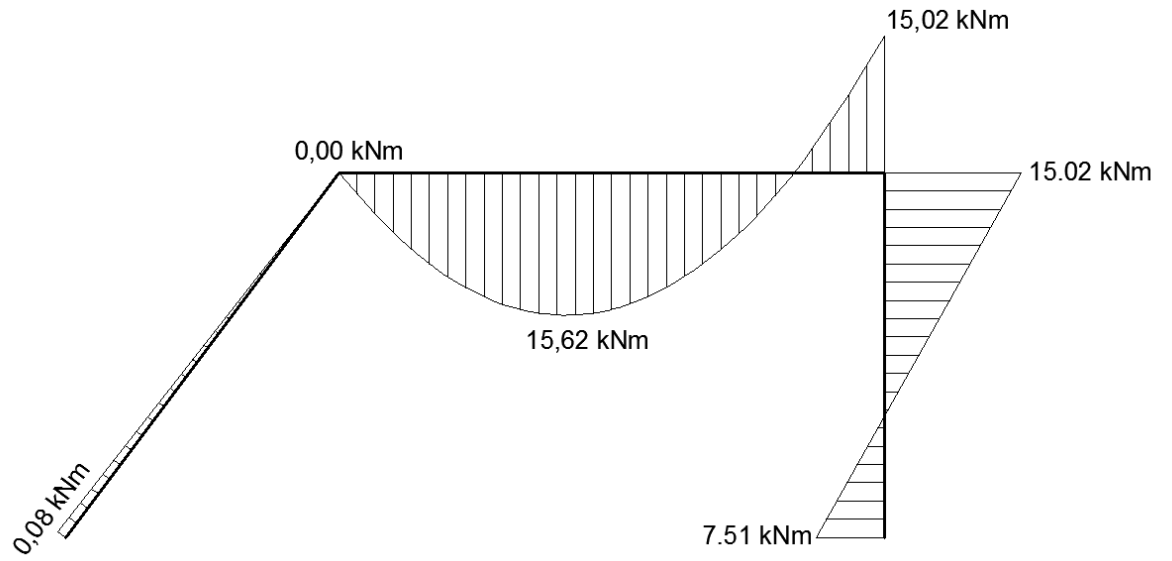
8.1. Siły osiowe:



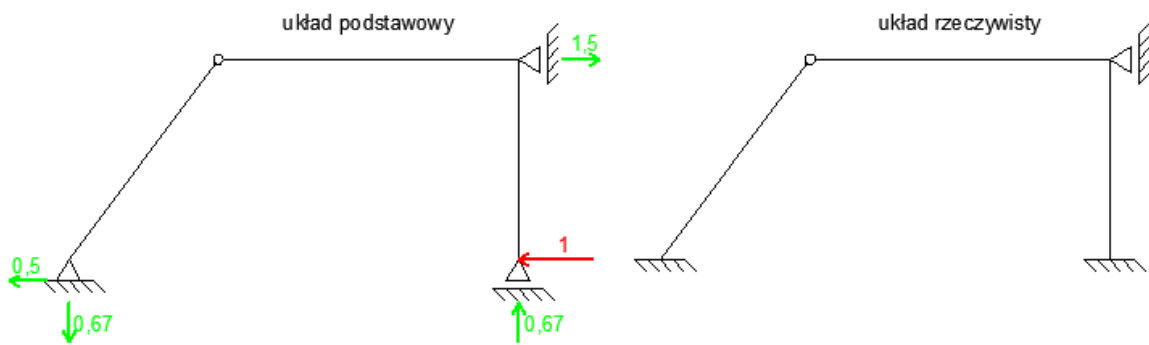
8.2. Siły tnące



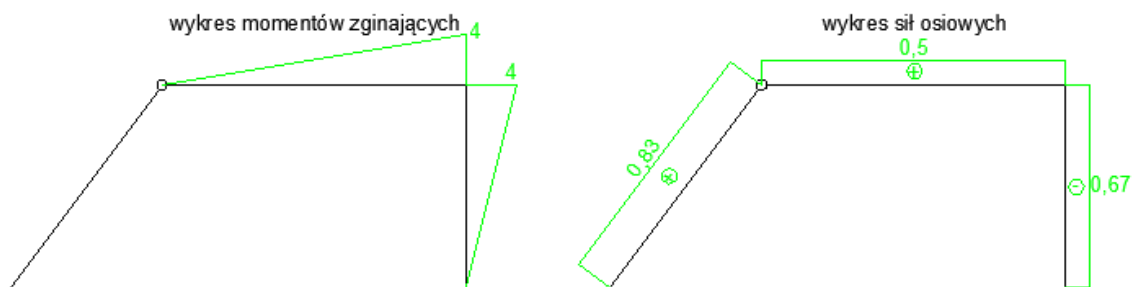
8.3. Momenty zginające:



9. Kontrola kinematyczna



wykresy sił wewnętrznych od obciążenia wirtualnego:



$$\bar{1} * \delta = \sum \int \frac{M * \bar{M}^0}{EI_i} dx + \sum \int \frac{N * \bar{N}^0}{EA_i} dx$$

$$\begin{aligned} \bar{1} * \delta &= \frac{1}{2772} * \left[\left(\frac{1}{2} * (-7,51) * 4 * \frac{1}{3} * 4 + \frac{1}{2} * 15,02 * 4 * \frac{2}{3} * 4 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} * (15,02) * 6 * \frac{2}{3} * 4 - \frac{5 * 6^2}{8} * \frac{2}{3} * 6 * 2 \right) \right] + \frac{1}{501900} \\ &\quad * (-0,67 * (-22,5) * 4 + 0,5 * (-9,35) * 6 + 0,83 * (-15,61) * 5) \\ &= \frac{1}{2772} * (60,08 - 59,84) + \frac{1}{501900} * (-153,13) = 8,32 * 10^{-5} - 30,51 * 10^{-5} \\ &= -2,22 * 10^{-4} \end{aligned}$$