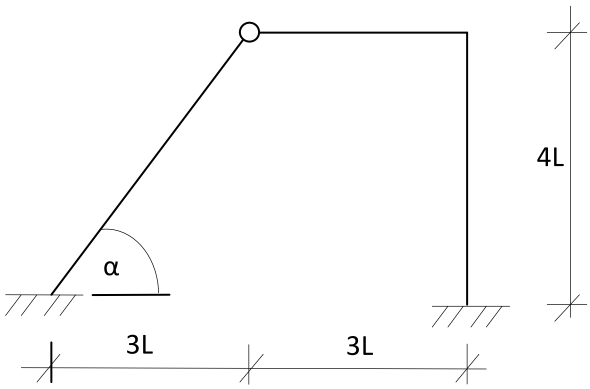
Schemat statyczny



L=1,0m

Wstępne przyjęcie przekroju:

Stal S235 f=215MPa

Przyjmuję schemat belki wolno podpartej obciążonej obciążeniem q.

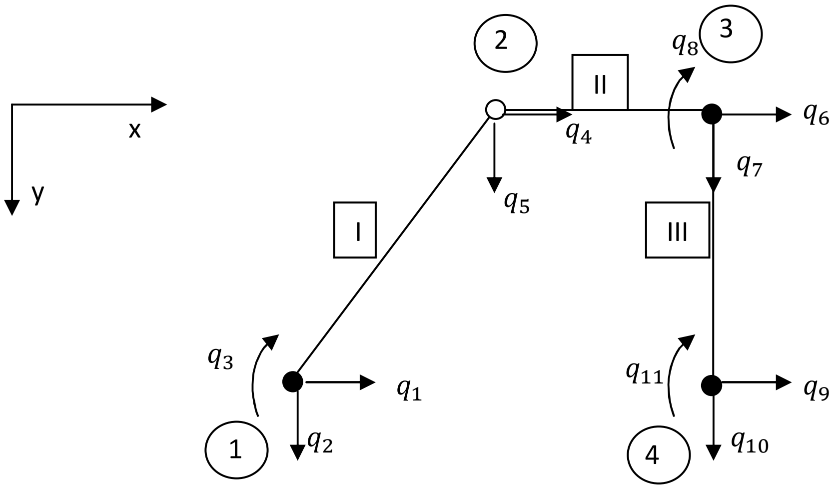
$$M = \frac{qL'^2}{8} = \frac{10 \cdot 5^2}{8} = 31{,}3kNm$$

$$W \geq \frac{M}{f} = \frac{3130}{21{,}5} = 145{,}5cm^3$$

Przyjęto profil **HEA160** o $W = 220{,}1cm^3$ $I = I_x = 1673cm^4$ $A = 38{,}8cm^2$ $\mu = 30{,}46kg/m$

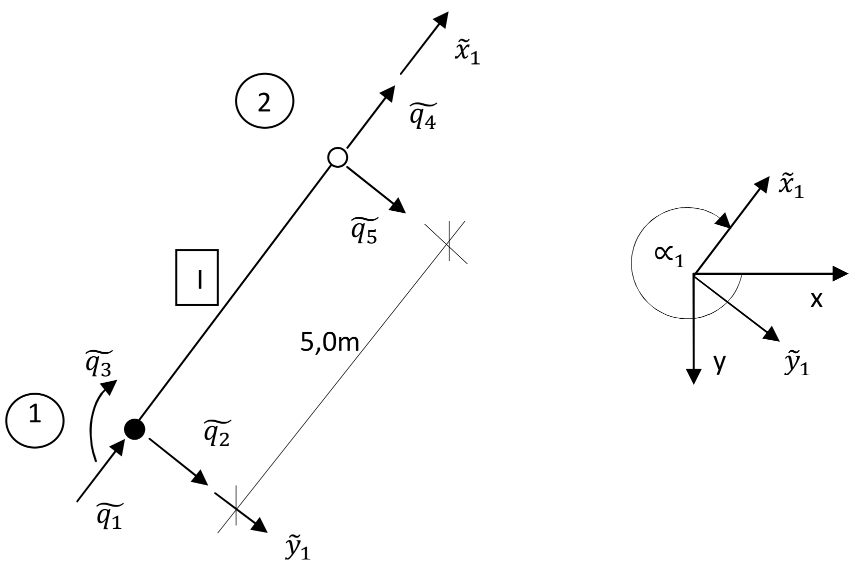
$$EI = 3429{,}65kN \cdot m^2 \quad EA = 795400{,}0kN$$

Podział konstrukcji na elementy



Wprowadzenie przemieszczeń w lokalnych układach współrzędnych w poszczególnych prętach.

- Pręt I



$$sin \propto_1 = -0{,}8$$

$$cos \propto_1 = 0{,}6$$

Macierz sztywności pręta I (l.u.w.):

$$\tilde{k}_1^r=\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 & -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI & 3EIL & 0 & -3EI & 0 \\ 0 & 3EIL & 3EIL^2 & 0 & -3EIL & 0 \\ -EAL^2 & 0 & 0 & EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & -3EIL & 0 & 3EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_1^r=\begin{bmatrix} 159080{,}000 & 0 & 0 & -159080{,}000 & 0 & 0 \\ 0 & 82{,}312 & 411{,}558 & 0 & -82{,}312 & 0 \\ 0 & 411{,}558 & 2057{,}790 & 0 & -411{,}558 & 0 \\ -159080{,}00 & 0 & 0 & 159080{,}00 & 0 & 0 \\ 0 & -82{,}312 & -411{,}558 & 0 & 82{,}312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot 10^3$$

Macierz transformacji pręta I:

$$T_1=\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} cos\propto_1 & sin\propto_1 & 0 \\ -sin\propto_1 & cos\propto_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1=\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

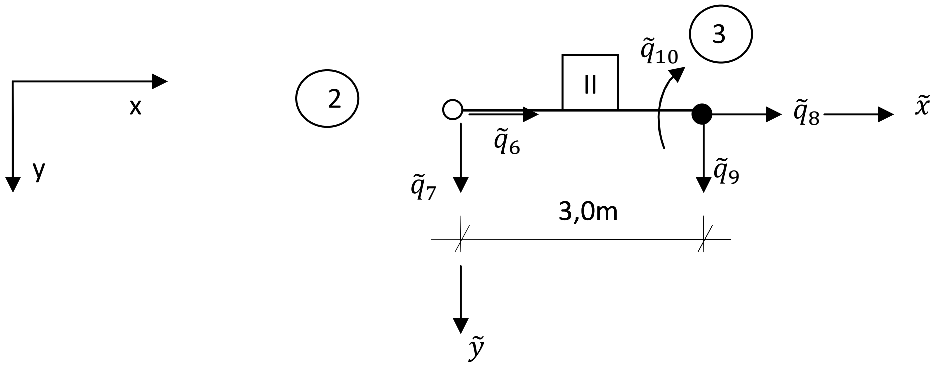
$$T_1^T=\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacja macierzy sztywności do globalnego układu sztywności:

$$k_1^r = T_1^T \cdot \tilde{k}_1^r \cdot T_1$$

$$k_1^r = \begin{bmatrix} 57321{,}4797 & -76318{,}8902 & 329{,}2464 & -57321{,}4797 & 76318{,}8902 & 0 \\ -76318{,}8902 & 101840{,}8323 & 246{,}9348 & 76318{,}8902 & -101840{,}8323 & 0 \\ 329{,}2464 & 246{,}9348 & 2057{,}7900 & -329{,}2464 & -246{,}9348 & 0 \\ 57216{,}1203 & -76397{,}9098 & -329{,}2464 & 57321{,}4797 & -76318{,}8902 & 0 \\ -76397{,}9098 & 101781{,}5677 & -246{,}9348 & -76318{,}8902 & 101840{,}8323 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

- Pręt II



$$\propto_2 = 0°$$

Macierz sztywności pręta II (l.u.w.) :

$$\tilde{k}_2^r = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 & -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI & 0 & 0 & -3EI & 3EIL \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EAL^2 & 0 & 0 & EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & 0 & 0 & 3EI & -3EIL \\ 0 & 3EIL & 0 & 0 & -3EIL & 3EIL^2 \end{bmatrix}$$

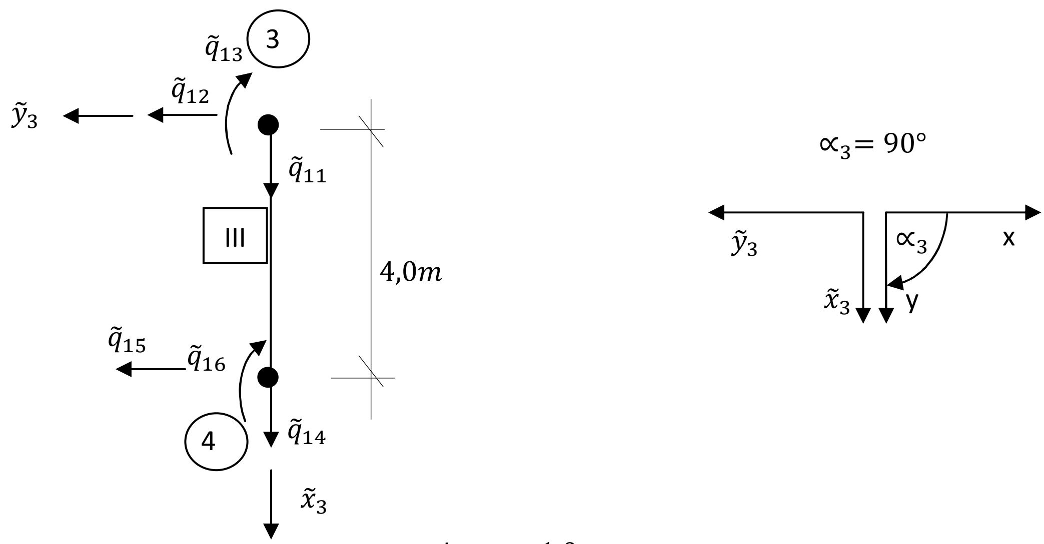
Ze względu na fakt, iż $\propto_2 = 0°$

$$\tilde{k}_2^r = k_2^r$$

a więc:

$$k_2^r = \begin{bmatrix} 265133{,}333 & 0 & 0 & -265133{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 381{,}072 & 0 & 0 & -381{,}072 & 1143{,}217 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -265133{,}333 & 0 & 0 & 265133{,}333 & 0 & 0 \\ 0 & -381{,}072 & 0 & 0 & 381{,}072 & -1143{,}217 \\ 0 & 1143{,}217 & 0 & 0 & -1143{,}217 & 3429{,}650 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

- Pręt III



$$sin \propto_3 = 1{,}0$$

$$cos \propto_3 = 0{,}0$$

Macierz sztywności pręta III (l.u.w.):

$$\tilde{k}_3^r = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 & -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI & 6EIL & 0 & -12EI & 6EIL \\ 0 & 6EIL & 4EIL^2 & 0 & -6EIL & 2EIL^2 \\ -EAL^2 & 0 & 0 & EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI & -6EIL & 0 & 12EI & -6EIL \\ 0 & 6EIL & 2EIL^2 & 0 & -6EIL & 4EIL^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_3^r = \begin{bmatrix} 198850{,}000 & 0 & 0 & -198850{,}000 & 0 & 0 \\ 0 & 643{,}059 & 1286{,}120 & 0 & -643{,}059 & 1286{,}12 \\ 0 & 1286{,}12 & 3429{,}650 & 0 & -1286{,}12 & 1714{,}825 \\ -198850{,}000 & 0 & 0 & 198850{,}000 & 0 & 0 \\ 0 & -643{,}059 & -1286{,}12 & 0 & 643{,}059 & -1286{,}12 \\ 0 & 1286{,}120 & 1714{,}825 & 0 & -1286{,}120 & 3429{,}650 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Macierz transformacji pręta I:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacja macierzy sztywności do globalnego układu sztywności:

$$k_3^r = T_3^T \cdot \tilde{k}_3^r \cdot T_3$$

$$k_3^r = \begin{bmatrix} 643{,}059 & 0 & -1286{,}120 & -643{,}059 & 0 & -1286{,}120 \\ 0 & 198850{,}000 & 0 & 0 & -198850{,}000 & 0 \\ -1286{,}120 & 0 & 3429{,}650 & 1286{,}120 & 0 & 1714{,}825 \\ -643{,}059 & 0 & 1286{,}120 & 643{,}059 & 0 & 1286{,}120 \\ 0 & -198850{,}000 & 0 & 0 & 198850{,}000 & 0 \\ -1286{,}120 & 0 & 1714{,}825 & 1286{,}120 & 0 & 3429{,}650 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Agregacja macierzy sztywności:

$$K=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&322454813&-76318890{,}2&-265133333&0&0&0&0&0\\0&0&0&-76318890&102221904&0&-381072&1143217&0&0&0\\0&0&0&-265133333&0&265776392&0&-1286120&0&0&0\\0&0&0&0&-381072&0&199231072&-1143217&0&0&0\\0&0&0&0&1143217&-1286120&-1143217&6859300&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}322454813&-76318890{,}2&-265133333&0&0\\-76318890&102221904&0&-381072&-1286120\\-265133333&0&265776392&0&-1286120\\0&-381072&0&199231072&-1143217\\0&1143217&-1286120&-1143217&6859300\end{bmatrix}$$

Macierze mas

- Pręt I

$$\widetilde{M}_1 = \frac{\mu l}{420}\left[0 \begin{matrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 204 & 36l & 0 & 58{,}5 & 0 \\ 0 & 36l & 8l^2 & 0 & 16{,}5 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 58{,}5 & 16{,}5l & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right]$$

$$\widetilde{M}_1 = \begin{bmatrix} 50{,}76667 & 0 & 0 & 25{,}38333 & 0 & 0 \\ 0 & 73{,}97429 & 65{,}27143 & 0 & 21{,}21321 & 0 \\ 0 & 65{,}27143 & 72{,}52381 & 0 & 29{,}91607 & 0 \\ 25{,}38333 & 0 & 0 & 50{,}76667 & 0 & 0 \\ 0 & 21{,}21321 & 29{,}91607 & 0 & 35{,}89929 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = T_1^T \cdot \widetilde{M}_1 \cdot T_1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 65{,}61954 & 11{,}13966 & 52{,}21714 & 22{,}71446 & -2{,}00166 & 0 \\ 11{,}13966 & 59{,}12141 & 39{,}16286 & -2{,}00166 & 23{,}88209 & 0 \\ 52{,}21714 & 39{,}16286 & 72{,}52381 & 23{,}93286 & 17{,}94964 & 0 \\ 22{,}71446 & -2{,}00166 & 23{,}93286 & 41{,}25154 & -7{,}13634 & 0 \\ -2{,}00166 & 23{,}88209 & 17{,}94964 & -7{,}13634 & 45{,}41441 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Pręt II

$$M_2 = \widetilde{M}_2 = \frac{\mu l}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 99 & 0 & 0 & 58{,}5 & -16{,}5l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 58{,}5 & 0 & 0 & 204 & -36l \\ 0 & -16{,}5l & 0 & 0 & -36l & 8l^2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 30{,}46 & 0 & 0 & 15{,}23 & 0 & 0 \\ 0 & 21{,}53957 & 0 & 0 & 12{,}72793 & -10{,}7698 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15{,}23 & 0 & 0 & 30{,}46 & 0 & 0 \\ 0 & 12{,}72793 & 0 & 0 & 44{,}38457 & -23{,}4977 \\ 0 & -10{,}7698 & 0 & 0 & -23{,}4977 & 15{,}66514 \end{bmatrix}$$

- Pręt III

$$\widetilde{M}_3 = \frac{\mu l}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{M}_3 = \begin{bmatrix} 40{,}61333 & 0 & 0 & 20{,}30667 & 0 & 0 \\ 0 & 45{,}25486 & 25{,}52838 & 0 & 15{,}66514 & -15{,}085 \\ 0 & 25{,}52838 & 18{,}5661 & 0 & 15{,}08495 & -13{,}9246 \\ 20{,}30667 & 0 & 0 & 40{,}61333 & 0 & 0 \\ 0 & 15{,}66514 & 15{,}08495 & 0 & 45{,}25486 & -25{,}5284 \\ 0 & -15{,}085 & -13{,}9246 & 0 & -25{,}5284 & 18{,}5661 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = T_3^T \cdot \widetilde{M}_3 \cdot T_3$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 45{,}25486 & 0 & -25{,}5284 & 15{,}66514 & 0 & 15{,}08495 \\ 0 & 40{,}61333 & 0 & 0 & 20{,}30667 & 0 \\ -25{,}5284 & 0 & 18{,}5661 & -15{,}085 & 0 & -13{,}9246 \\ 15{,}66514 & 0 & -15{,}085 & 45{,}25486 & 0 & 25{,}52838 \\ 0 & 20{,}30667 & 0 & 0 & 40{,}61333 & 0 \\ 15{,}08495 & 0 & -13{,}9246 & 25{,}52838 & 0 & 18{,}5661 \end{bmatrix}$$

Agregacja macierzy mas:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 71{,}71154 & -7{,}13634 & 15{,}23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7{,}13634 & 66{,}95398 & 0 & 12{,}72793 & -10{,}7698 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15{,}23 & 0 & 75{,}71486 & 0 & -25{,}5284 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12{,}72793 & 0 & 84{,}9979 & -23{,}4977 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10{,}7698 & -25{,}5284 & -23{,}4977 & 34{,}23124 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 71{,}71154 & -7{,}13634 & 15{,}23 & 0 & 0 \\ -7{,}13634 & 66{,}95398 & 0 & 12{,}72793 & -10{,}7698 \\ 15{,}23 & 0 & 75{,}71486 & 0 & -25{,}5284 \\ 0 & 12{,}72793 & 0 & 84{,}9979 & -23{,}4977 \\ 0 & -10{,}7698 & -25{,}5284 & -23{,}4977 & 34{,}23124 \end{bmatrix}$$

Równanie równowagi dynamicznej układu

$$\boldsymbol{K \cdot q + M \cdot \ddot{q} = 0} \qquad \boldsymbol{q = q_0 sin\omega t}$$
$$\boldsymbol{(K - \lambda M) q_0 = 0} \qquad \boldsymbol{\lambda = \omega^2}$$

Wektor wartości własnych: $\lambda = \begin{bmatrix} 4755{,}20 \\ 229978{,}00 \\ 1647450{,}00 \\ 3055940{,}00 \\ 12526200{,}00 \end{bmatrix}$

Macierz własna: $q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}19014 & 0{,}0863549 & 0{,}257485 & -0{,}789424 \\ 0{,}748131 & 0{,}115003 & -0{,}821553 & -0{,}33325 & 0{,}10281 \\ 0{,}999385 & 0{,}184591 & 0{,}243552 & 0{,}143632 & 1 \\ 0{,}0018726 & -0{,}0249468 & -0{,}151702 & 1{,}36242 & 0{,}324305 \\ 0{,}0406708 & 1{,}14134 & -0{,}227822 & 0{,}981548 & 1{,}01335 \end{bmatrix}$

Częstości drgań własnych:

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$\omega_1 = 68{,}960\ rad/s$
$\omega_2 = 479{,}560\ rad/s$
$\omega_3 = 1283{,}530\ rad/s$
$\omega_4 = 1748{,}125\ rad/s$
$\omega_5 = 3539{,}237\ rad/s$

Postacie drgań własnych:

W celu narysowania postaci drgań własnych wykorzystam funkcje kształtu(karta tematyczna)

Do opisu przemieszczeń na długości pręta wykorzystam następującymi funkcjami przemieszczeń:

$$u(\tilde{x}) = \tilde{q}_1 \cdot N_1(\tilde{x}) + \tilde{q}_4 \cdot N_4(\tilde{x})$$

$$v(\tilde{x}) = \tilde{q}_2 \cdot N_2(\tilde{x}) + \tilde{q}_3 \cdot N_3(\tilde{x}) + \tilde{q}_5 \cdot N_5(\tilde{x}) + \tilde{q}_6 \cdot N_6(\tilde{x})$$

- $\omega_1 = 68{,}960\ rad/s$

Wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych w układzie lokalnym ($\tilde{q}_i = T_i \cdot q_i$)

PRĘT I	PRĘT II	PRĘT III	[JEDNOSTKA]
0	1	0,0018726	m
0	0,748131	-0,999385	m
0	0	0,0406708	rad
0,0014952	0,999385	0	m
1,2488786	0,0018726	0	m
0	0,0406708	0	rad

POSTAĆ PIERWSZA	PRĘT	X[m]	u[m]	v[m]
	PRĘT I	0	0	0
		1,0	0,000299	0,069937
		2,0	0,000598	0,259767
		3,0	0,000897	0,539516
		4,0	0,001196	0,879211
		5,0	0,001495	1,248879
	PRĘT II	0	1	0,748131
		0,5	0,999898	0,553409
		1,0	0,999795	0,370745
		1,5	0,999693	0,212201
		2,0	0,99959	0,089835
		2,5	0,999488	0,015705
		3,0	0,999385	0,001873
	PRĘT III	0	0,001873	-0,99939
		1,0	0,001404	-0,82035
		2,0	0,000936	-0,47936
		3,0	0,000468	-0,14853
		4,0	0	0

- $\omega_2 = 479{,}560\ rad/s$

Wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych w układzie lokalnym ($\tilde{q}_i = T_i \cdot q_i$)

PRĘT I	PRĘT II	PRĘT III	[JEDNOSTKA]
0	0,19014	-0,02495	m
0	0,115003	-0,18459	m
0	0	1,14134	rad
0,0220816	0,184591	0	m
0,2211138	-0,0249468	0	m
0	1,14134	0	rad

	PRĘT	X[m]	u[m]	v[m]
DRUGA POSTAĆ	PRĘT I	0	0	0
		1,0	0,004416	0,012382
		2,0	0,008833	0,045992
		3,0	0,013249	0,095521
		4,0	0,017665	0,155664
		5,0	0,022082	0,221114
	PRĘT II	0	0,19014	0,115003
		0,5	0,189215	-0,19707
		1,0	0,18829	-0,45964
		1,5	0,187366	-0,62322
		2,0	0,186441	-0,63829
		2,5	0,185516	-0,45537
		3,0	0,184591	-0,02495
	PRĘT III	0	-0,02495	-0,18459
		1,0	-0,01871	0,486256
		2,0	-0,01248	0,478375
		3,0	-0,00624	0,185159
		4,0	0	0

- $\omega_3 = 1283{,}530\ rad/s$
  Wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych w układzie lokalnym ($\tilde{q}_i = T_i \cdot q_i$)

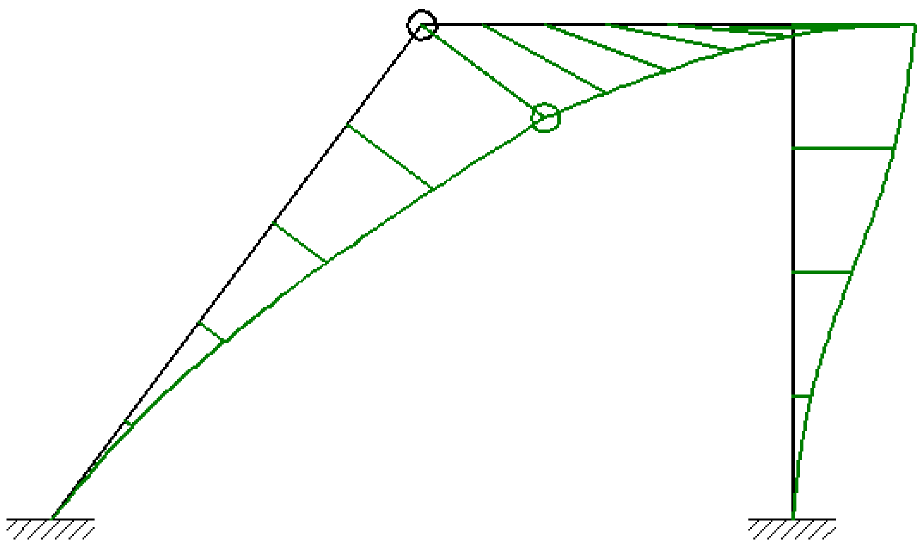
PRĘT I	PRĘT II	PRĘT III	[JEDNOSTKA]
0	0,0863549	-0,1517	m
0	-0,821553	-0,24355	m
0	0	-0,22782	rad
0,70905534	0,243552	0	m
-0,42384788	-0,151702	0	m
0	-0,227822	0	rad

	PRĘT	X[m]	u[m]	v[m]
TRZECIA POSTAĆ	PRĘT I	0	0	0
		1,0	0,141811	-0,02374
		2,0	0,283622	-0,08816
		3,0	0,425433	-0,1831
		4,0	0,567244	-0,29839
		5,0	0,709055	-0,42385
	PRĘT II	0	0,086355	-0,82155
		0,5	0,112554	-0,60027
		1,0	0,138754	-0,39778
		1,5	0,164953	-0,23288
		2,0	0,191153	-0,12437

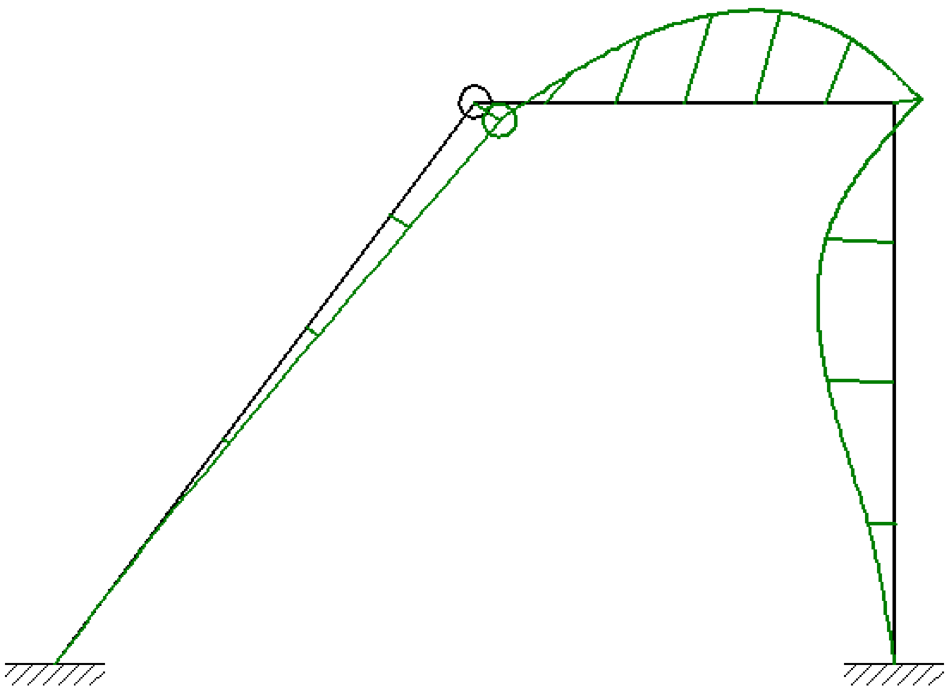
		2,5	0,217352	-0,09105
		3,0	0,243552	-0,1517
	PRĘT III	0	-0,1517	-0,24355
		1,0	-0,11378	-0,33364
		2,0	-0,07585	-0,23569
		3,0	-0,03793	-0,08077
		4,0	0	0

Graficzne przedstawienie przemieszczeń:

- $\omega_1 = 68{,}960\ rad/s$



- $\omega_2 = 479{,}560\ rad/s$



- $\omega_3 = 1283{,}530\ rad/s$