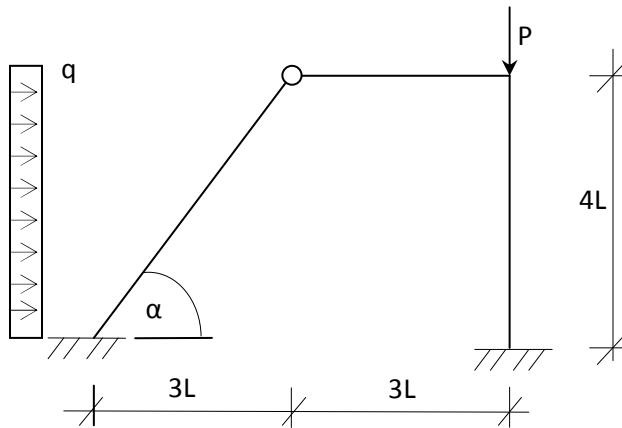


## Schemat statyczny



$$L=1,0\text{m}$$

$$q=10\text{ kN/m}$$

$$P=2qL=20,0\text{ kN}$$

### Wstępne przyjęcie przekroju:

Stal S235  $f=215\text{MPa}$

Przyjmuję schemat belki wolno podpartej obciążonej obciążeniem  $q$ .

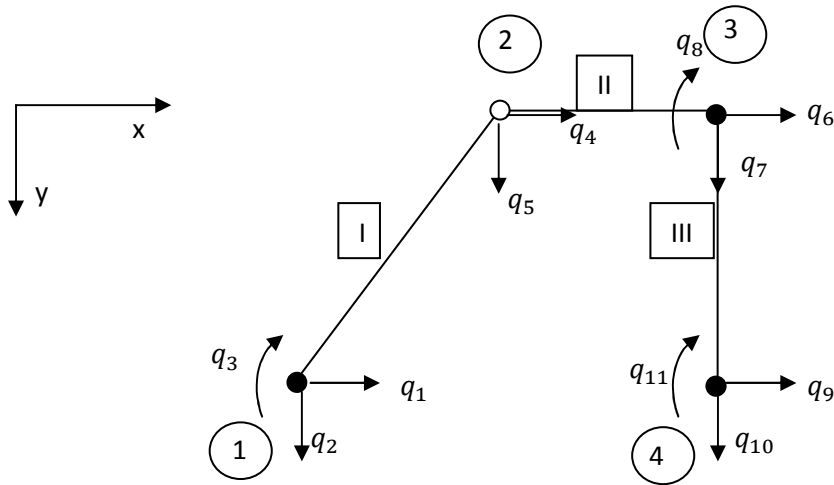
$$M = \frac{qL'^2}{8} = \frac{10 \cdot 5^2}{8} = 31,3\text{kNm}$$

$$W \geq \frac{M}{f} = \frac{3130}{21,5} = 145,5\text{cm}^3$$

Przyjęto profil **HEA160** o  $W = 220,1\text{cm}^3$   $I = I_x = 1673\text{cm}^4$   $A = 38,8\text{cm}^2$

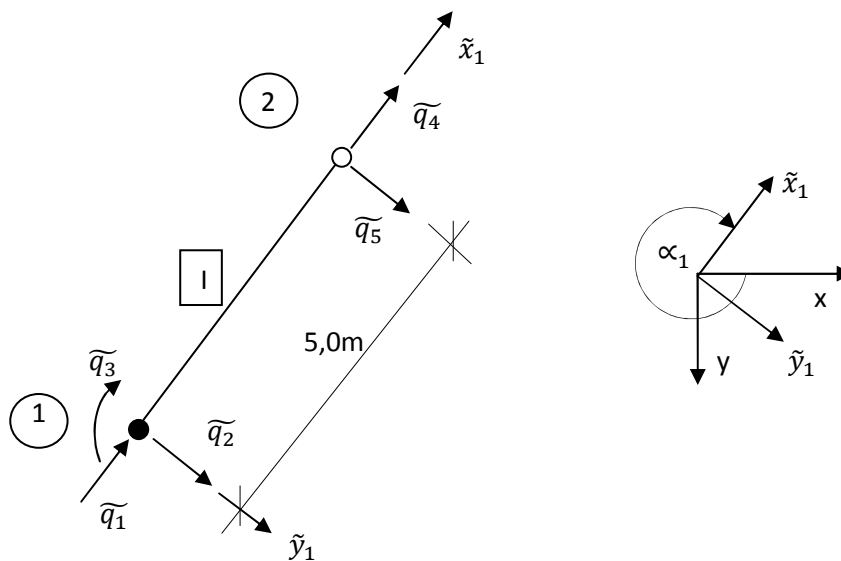
$$EI = 3429,65\text{kN} \cdot \text{m}^2 \quad EA = 795400,0\text{kN}$$

## Podział konstrukcji na elementy



## Wprowadzenie przemieszczeń w lokalnych układach współrzędnych w poszczególnych prętach.

- Pręt I



$$\sin \alpha_1 = -0,8$$

$$\cos \alpha_1 = 0,6$$

Macierz sztywności pręta I (l.u.w.):

$$\tilde{k}_1^r = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 & -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI & 3EIL & 0 & -3EI & 0 \\ 0 & 3EIL & 3EIL^2 & 0 & -3EIL & 0 \\ -EAL^2 & 0 & 0 & EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & -3EIL & 0 & 3EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_1^r = \begin{bmatrix} 159080,000 & 0 & 0 & -159080,000 & 0 & 0 \\ 0 & 82,312 & 411,558 & 0 & -82,312 & 0 \\ 0 & 411,558 & 2057,790 & 0 & -411,558 & 0 \\ -159080,000 & 0 & 0 & 159080,000 & 0 & 0 \\ 0 & -82,312 & -411,558 & 0 & 82,312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji pręta I:

$$T_1 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^T = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

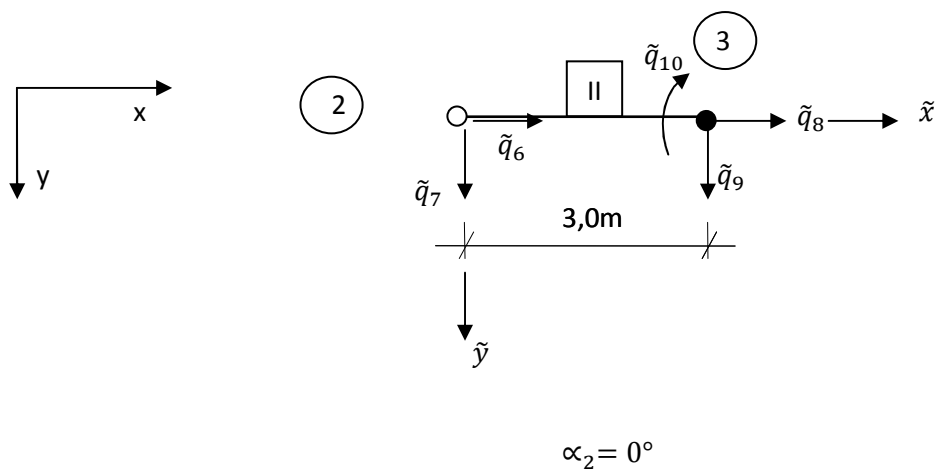
# Metoda przemieszczeń-ujęcie komputerowe

Transformacja macierzy sztywności do globalnego układu sztywności:

$$k_1^r = T_1^T \cdot \tilde{k}_1^r \cdot T_1$$

$$k_1^r = \begin{bmatrix} 57321,4797 & -76318,8902 & 329,2464 & -57321,4797 & 76318,8902 & 0 \\ -76318,8902 & 101840,8323 & 246,9348 & 76318,8902 & -101840,8323 & 0 \\ 329,2464 & 246,9348 & 2057,7900 & -329,2464 & -246,9348 & 0 \\ 57216,1203 & -76397,9098 & -329,2464 & 57321,4797 & -76318,8902 & 0 \\ -76397,9098 & 101781,5677 & -246,9348 & -76318,8902 & 101840,8323 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Pręt II



Macierz sztywności pręta II (l.u.w.) :

$$\tilde{k}_2^r = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 & -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI & 0 & 0 & -3EI & 3EIL \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EAL^2 & 0 & 0 & EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3EI & 0 & 0 & 3EI & -3EIL \\ 0 & 3EIL & 0 & 0 & -3EIL & 3EIL^2 \end{bmatrix}$$

## Metoda przemieszczeń-ujęcie komputerowe

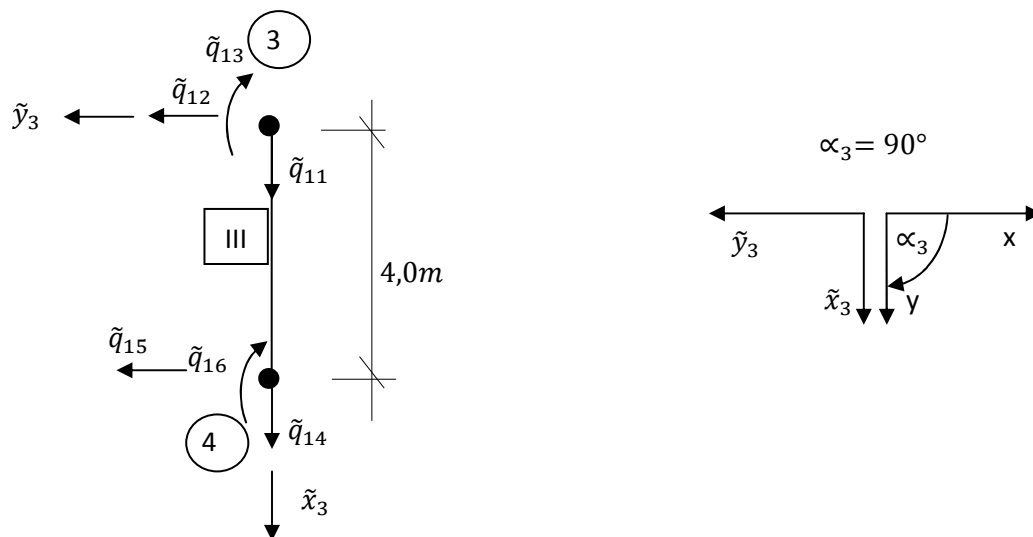
Ze względu na fakt, iż  $\alpha_2 = 0^\circ$

$$\tilde{k}_2^r = k_2^r$$

a więc:

$$k_2^r = \begin{bmatrix} 265133,333 & 0 & 0 & -265133,33 & 0 & 0 \\ 0 & 381,072 & 0 & 0 & -381,072 & 1143,217 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -265133,333 & 0 & 0 & 265133,333 & 0 & 0 \\ 0 & -381,072 & 0 & 0 & 381,072 & -1143,217 \\ 0 & 1143,217 & 0 & 0 & -1143,217 & 3429,650 \end{bmatrix}$$

- Pręt III



$$\sin \alpha_3 = 1,0$$

$$\cos \alpha_3 = 0,0$$

Macierz sztywności pręta III (l.u.w.):

$$\tilde{k}_3^r = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 & -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI & 6EIL & 0 & -12EI & 6EIL \\ 0 & 6EIL & 4EIL^2 & 0 & -6EIL & 2EIL^2 \\ -EAL^2 & 0 & 0 & EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI & -6EIL & 0 & 12EI & -6EIL \\ 0 & 6EIL & 2EIL^2 & 0 & -6EIL & 4EIL^2 \end{bmatrix}$$

## Metoda przemieszczeń-ujęcie komputerowe

$$\tilde{k}_3^r = \begin{bmatrix} 198850,000 & 0 & 0 & -198850,000 & 0 & 0 \\ 0 & 643,059 & 1286,120 & 0 & -643,059 & 1286,12 \\ 0 & 1286,12 & 3429,650 & 0 & -1286,12 & 1714,825 \\ -198850,000 & 0 & 0 & 198850,000 & 0 & 0 \\ 0 & -643,059 & -1286,12 & 0 & 643,059 & -1286,12 \\ 0 & 1286,120 & 1714,825 & 0 & -1286,120 & 3429,650 \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji pręta I:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacja macierzy sztywności do globalnego układu sztywności:

$$k_3^r = T_3^T \cdot \tilde{k}_3^r \cdot T_3$$

$$k_3^r = \begin{bmatrix} 643,059 & 0 & -1286,120 & -643,059 & 0 & -1286,120 \\ 0 & 198850,000 & 0 & 0 & -198850,000 & 0 \\ -1286,120 & 0 & 3429,650 & 1286,120 & 0 & 1714,825 \\ -643,059 & 0 & 1286,120 & 643,059 & 0 & 1286,120 \\ 0 & -198850,000 & 0 & 0 & 198850,000 & 0 \\ -1286,120 & 0 & 1714,825 & 1286,120 & 0 & 3429,650 \end{bmatrix}$$

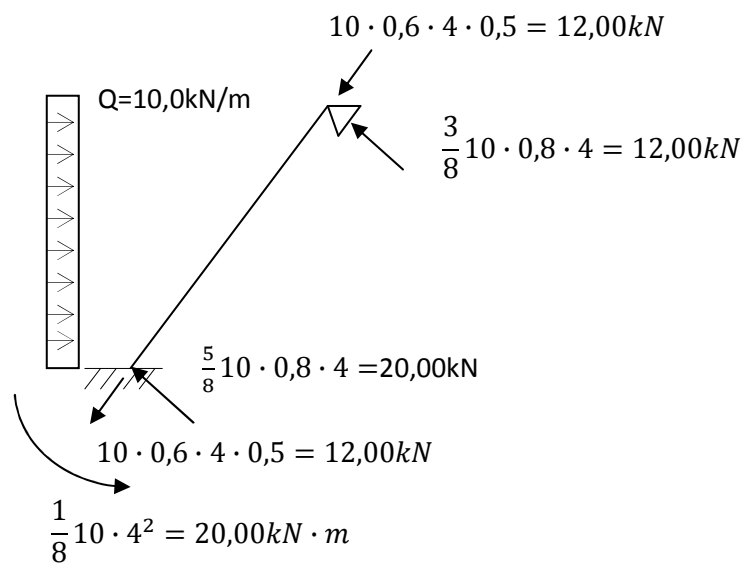
Agregacja macierzy sztywności:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 322454,8127 & -76318,8900 & -265133,330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -76318,8902 & 1022221,9043 & 0 & -381,0720 & 1143,2170 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -265133,3330 & 0 & 165776,3920 & 0 & -1286,1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -381,0720 & 0 & 199231,0700 & -1143,2200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1143,2170 & -1286,1200 & -1143,2170 & 6859,3000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 01 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych:

$$P_w = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} kN$$

- Wektor sił przywęzłowych dla pręta I:



$$\tilde{R}_1^w = \begin{Bmatrix} -12,00 \\ -20,00 \\ -20,00 \\ -12,00 \\ -12,00 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \\ kN \\ kN \end{matrix}$$



Transformacja  $\tilde{R}_1^w$  do  $R_1^w$

$$R_1^w = T_1^T \cdot \tilde{R}_1^w$$

$$R_1^w = \left\{ \begin{array}{l} -23,20 \text{ kN} \\ -2,40 \text{ kN} \\ -20,00 \text{ kNm} \\ -16,80 \text{ kN} \\ 2,40 \text{ kN} \end{array} \right.$$

Wektor wszystkich sił przywęzłowych:

$$R^w = \left\{ \begin{array}{l} -23,20 \text{ kN} \\ -2,40 \text{ kN} \\ -20,00 \text{ kNm} \\ -16,80 \text{ kN} \\ 2,40 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Wektor sił  $P = P_w - R^w$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} 23,20 \text{ kN} \\ -2,40 \text{ kN} \\ 20,00 \text{ kNm} \\ 16,80 \text{ kN} \\ -2,40 \text{ kN} \\ 0 \\ 20,00 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16,80 \text{ kN} \\ -2,40 \text{ kN} \\ 0 \\ 20,00 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Układ równań algebraicznych ma postać:

$$K \cdot q = P$$

## Metoda przemieszczeń-ujęcie komputerowe

---

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 322454,813 & -76318,890 & -265133,333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -76318,890 & 102221,904 & 0 & -381,072 & 1143,217 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -265133,333 & 0 & 265776,389 & 0 & -1286,120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -381,072 & 0 & 199231,072 & -1143,217 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1143,217 & -1286,120 & -1143,217 & 6859,300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16,80 \\ -2,40 \\ 0 \\ 20,00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,015743 \\ 0,011720 \\ 0,015710 \\ 0,000129 \\ 0,001014 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \\ m \\ m \\ m \\ m \\ rad \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

- Wektor przemieszczeń elementu pierwszego:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,015743 \\ 0,011720 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \\ m \\ m \end{matrix}$$

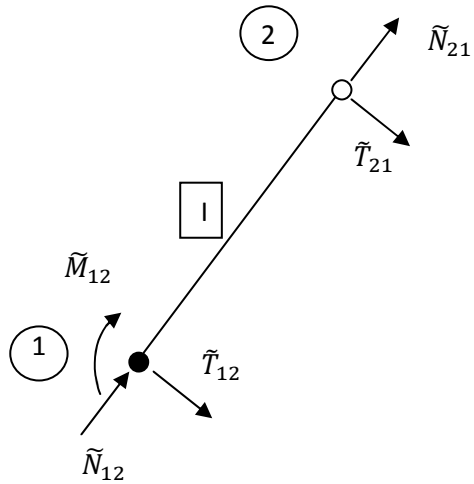
Transformacja wektora  $q_1$  do lokalnego układu współrzędnych:

$$\tilde{q}_1 = T_1 \cdot q_1$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \\ \tilde{q}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0000698 \\ 0,019626 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \\ m \\ m \end{matrix}$$

Wektor sił przywęzłowych pręta pierwszego w lokalnym układzie współrzędnych:

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{k}_1 \cdot \tilde{q}_1 + \tilde{R}_1^w$$



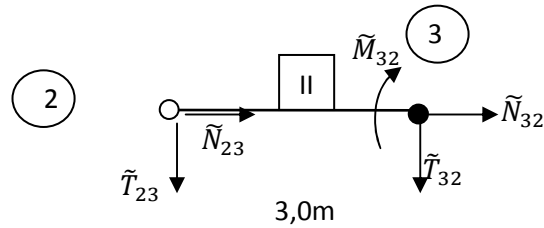
$$Q_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{12} \\ \tilde{T}_{12} \\ \tilde{M}_{12} \\ \tilde{N}_{21} \\ \tilde{T}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -23,172784 \\ -21,6158998 \\ -28,07945972 \\ -0,827216 \\ -10,3841002 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kN \cdot m \\ kN \\ kN \end{matrix}$$

- Wektor przemieszczeń elementu drugiego

$$\tilde{q}_2 = q_2 = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_6 \\ \tilde{q}_7 \\ \tilde{q}_8 \\ \tilde{q}_9 \\ \tilde{q}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,015702 \\ 0,011783 \\ 0,015669 \\ 0,000129 \\ 0,000996 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

Wektor sił przywęzłowych pręta drugiego w lokalnym układzie współrzędnych:

$$\tilde{Q}_2 = \tilde{k}_2 \cdot \tilde{q}_2$$



$$Q_2 = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{23} \\ \tilde{T}_{23} \\ \tilde{N}_{32} \\ \tilde{T}_{32} \\ \tilde{M}_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8,7494 \\ 5,579657 \\ -8,7494 \\ -5,57966 \\ 16,73898 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kN \\ kN \\ kN \cdot m \end{matrix}$$

- Wektor przemieszczeń elementu trzeciego:

$$q_3 = \begin{Bmatrix} q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,015669 \\ 0,000129 \\ 0,000996 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

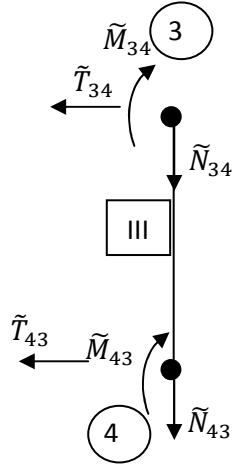
Transformacja wektora  $q_3$  do lokalnego układu współrzędnych:

$$\tilde{q}_3 = T_3 \cdot q_3$$

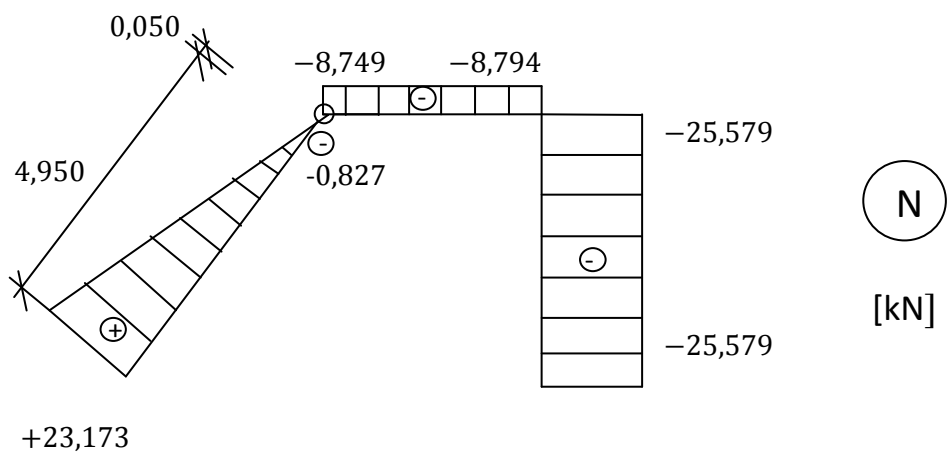
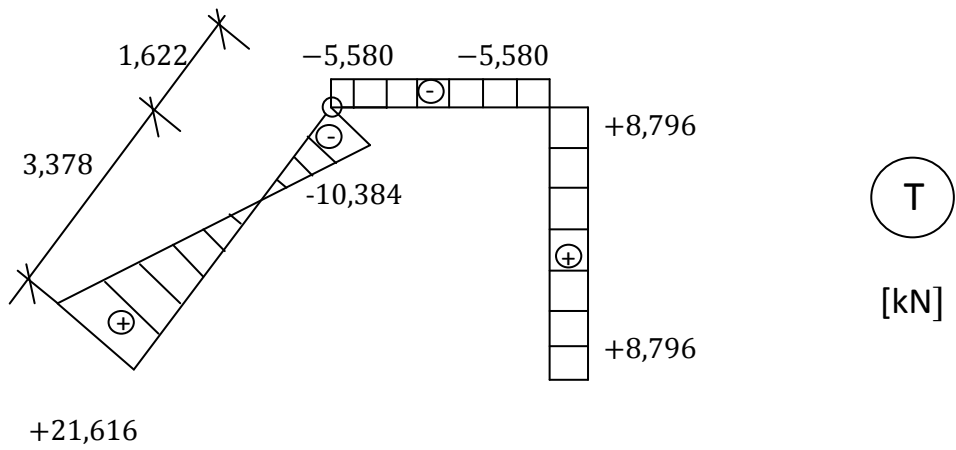
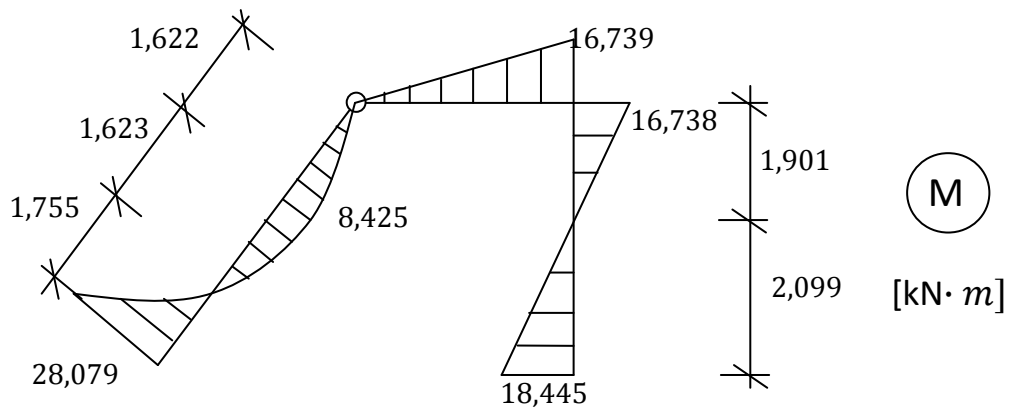
$$\tilde{q}_3 = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{11} \\ \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{13} \\ \tilde{q}_{14} \\ \tilde{q}_{15} \\ \tilde{q}_{16} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,000129 \\ -0,01567 \\ 0,000996 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

Wektor sił przywęzłowych pręta trzeciego w lokalnym układzie współrzędnych:

$$\tilde{Q}_3 = \tilde{k}_3 \cdot \tilde{q}_3$$



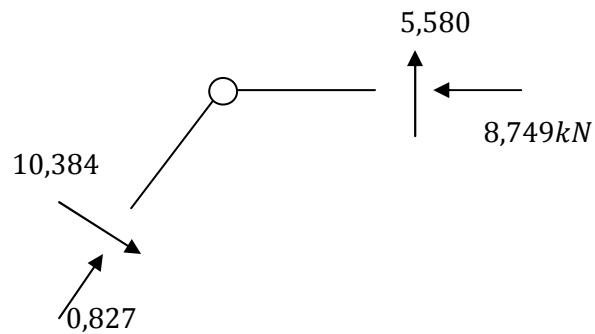
$$Q_3 = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{34} \\ \tilde{T}_{34} \\ \tilde{M}_{34} \\ \tilde{N}_{43} \\ \tilde{T}_{43} \\ \tilde{M}_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25,57926 \\ -8,79567 \\ -16,7378 \\ -25,5793 \\ 8,79567 \\ -18,445 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kN \cdot m \\ kN \\ kN \\ kN \cdot m \end{matrix}$$





Sprawdzenie :

- Węzeł 2

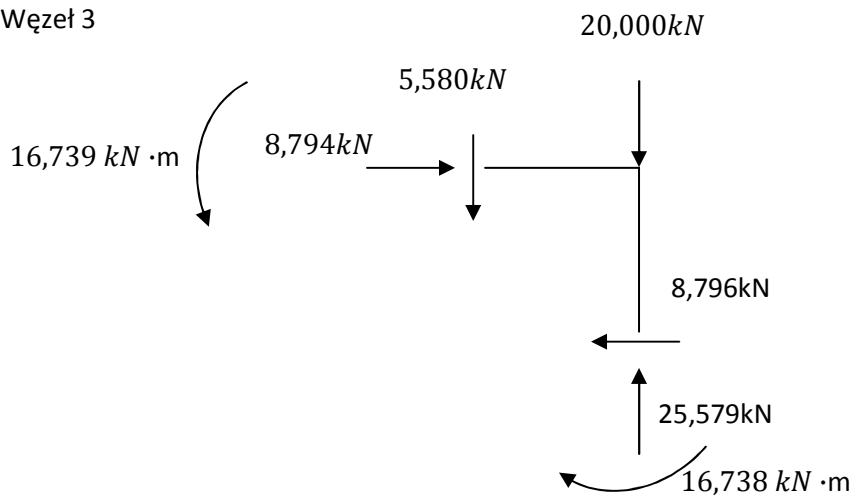


$$\Sigma X = 0,827 \cdot 0,6 + 10,384 \cdot 0,8 - 8,749 \cong 0,00kN$$

$$\Sigma Y = 0,827 \cdot 0,8 - 10,384 \cdot 0,6 + 5,580 \cong 0,00kN$$

**Węzeł w równowadze**

- Węzeł 3



$$\Sigma X = 8,794 - 8,796 \cong 0,00kN$$

$$\Sigma Y = 5,580 + 20,000 - 25,579 \cong 0,00kN$$

$$\Sigma M = 16,739 - 16,738 = 0,00kN \cdot m$$

**Węzeł w równowadze**