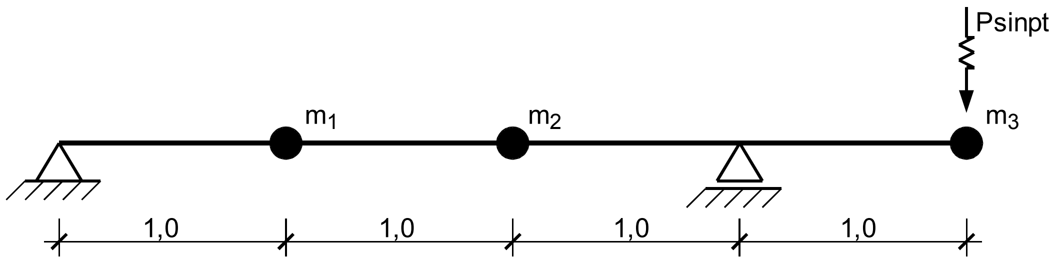
DYNAMIKA – UJĘCIE KLASYCZNE



Rys. 1.1. Schemat konstrukcji

Dane:

m_1 = 60 kg

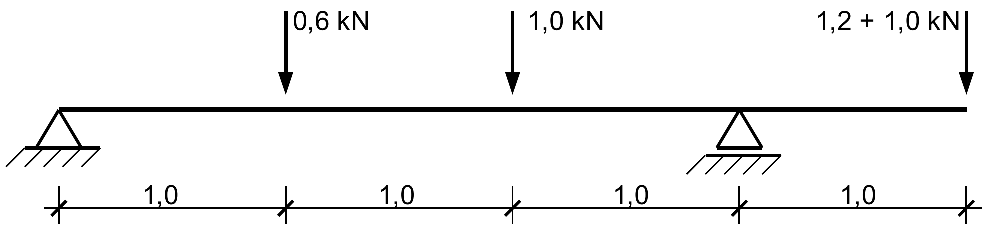
m_2 = 100 kg

m_3 = 120 kg

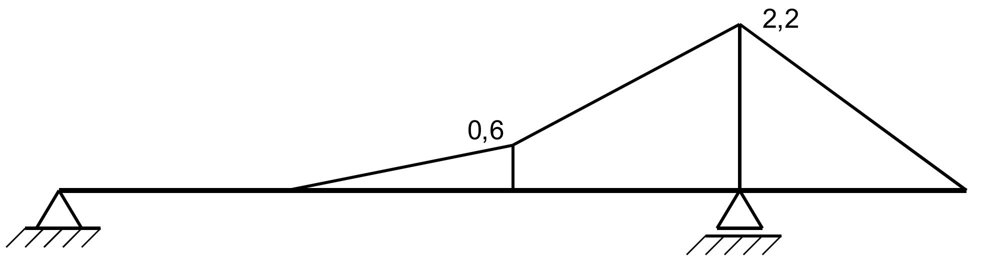
P = 1 000 N

p = 500 rad/s

1. Przyjęcie przekroju belki przy statycznym obciążeniu masami



Rys. 1.2. Schemat konstrukcji przy statycznym obciążeniu



Rys. 1.3. Wartości momentów zginających od obciążenia statycznego

$$\sigma = \frac{M}{w}$$

Przyjęto σ_{dop} = 100 MPa = 10 kN/cm^2

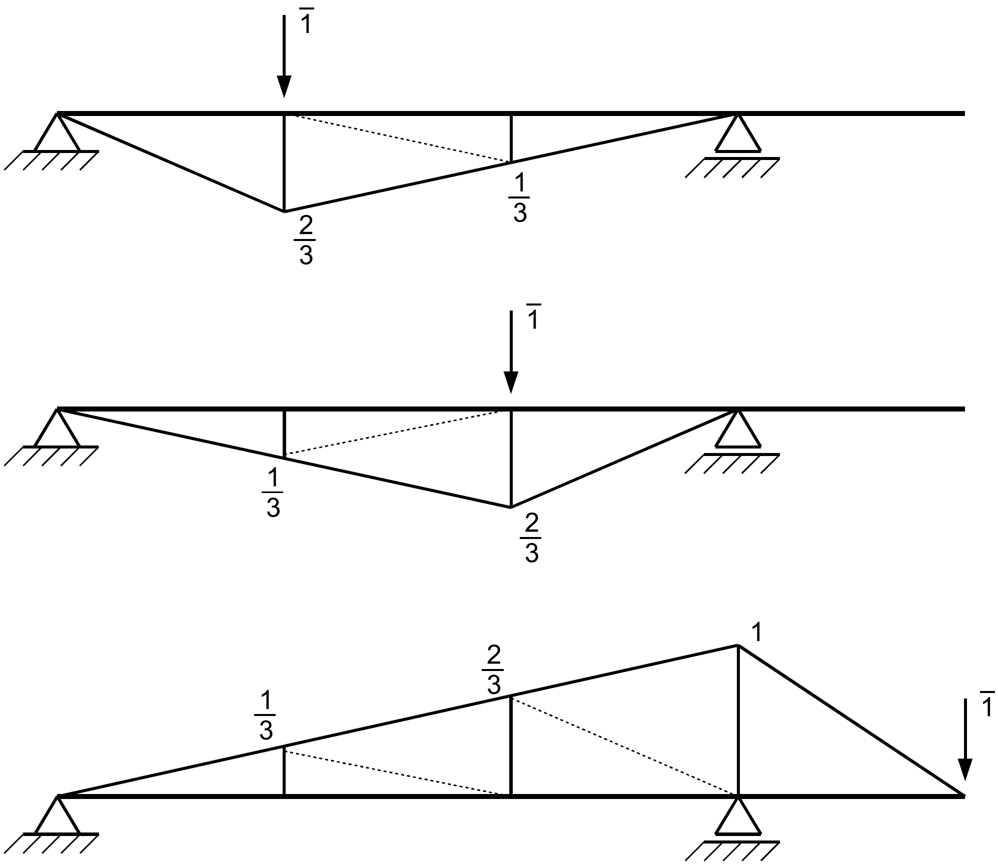
$$w = \frac{M}{\sigma} = \frac{220}{10} = 22\ [cm^3]$$

Przyjęto dwuteownik NP 100

$$w = 34{,}2\ cm^3$$
$$I = 171\ cm^4$$
$$E = 200\ GPa$$

2. Obliczenie częstości i postaci drgań własnych

- Wyznaczenie macierzy podatności



Rys. 1.4. Wartości momentów zginających od stanów jednostkowych

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right]=\frac{4}{9}EI^{-1}$$

$$\delta_{22}=\delta_{11}=\frac{4}{9}EI^{-1}$$

$$\delta_{33}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right]=\frac{4}{3}EI^{-1}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right]=\frac{7}{18}EI^{-1}$$

$$\delta_{13}=-\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)\right]=$$
$$=-\frac{4}{9}EI^{-1}$$

$$\delta_{23}=-\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)\right]=$$
$$=-\frac{5}{9}EI^{-1}$$

$$D=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{7}{18} & -\frac{4}{9}\\ \frac{7}{18} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

- Wyznaczenie częstości drgań własnych

$$\left(\underline{D}\,\underline{M}-\frac{1}{\omega^2}\underline{I}\right)\underline{a}=\underline{0}$$

Warunek nietrywialnego rozwiązania:

$$det\left|\underline{D}\,\underline{M}-\frac{1}{\omega^2}\underline{I}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}-\frac{1}{\omega^2} & m_2\delta_{12} & m_3\delta_{13}\\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22}-\frac{1}{\omega^2} & m_3\delta_{23}\\ m_1\delta_{31} & m_2\delta_{32} & m_3\delta_{33}-\frac{1}{\omega^2}\end{vmatrix}=0$$

Do dalszych obliczeń przyjęto następujące założenia:

$$m_2 = 100 = m \qquad \lambda = \frac{EI}{\omega^2 m}$$
$$m_1 = 60 = 0{,}6\ m$$
$$m_3 = 120 = 1{,}2\ m$$

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{15} - \lambda & \frac{7}{18} & -\frac{18}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{4}{9} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{5}{9} & 1{,}6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Po rozwiązaniu równania otrzymano:

$$\lambda_1 = 2{,}0040$$
$$\lambda_2 = 0{,}2688$$
$$\lambda_3 = 0{,}0384$$

stąd częstości drgań własnych wynoszą:

$$\omega_1 = 41{,}31 \quad [rad/s]$$
$$\omega_2 = 112{,}80 \ [rad/s]$$
$$\omega_3 = 298{,}43 \ [rad/s]$$

- Wyznaczenie postaci drgań własnych
  - I postać $\lambda_1 = 2{,}0040$, $\omega_1 = 41{,}31$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{4}{15} - 2{,}004 & \frac{7}{18} & -\frac{18}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{4}{9} - 2{,}004 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{5}{9} & 1{,}6 - 2{,}004 \end{vmatrix}$$

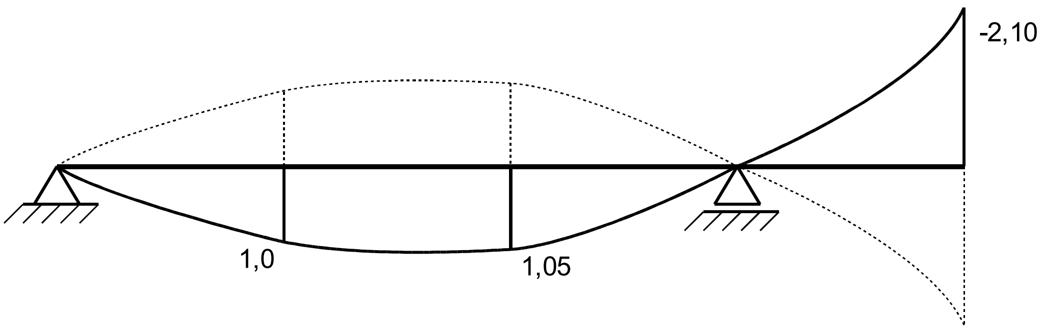
$$A = \begin{vmatrix} -1{,}7373 & 0{,}3889 & -0{,}5333 \\ 0{,}2333 & -1{,}5596 & -0{,}6667 \\ -0{,}2667 & -0{,}5555 & -0{,}4040 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -1{,}5596 & -0{,}6667 \\ -0{,}5555 & -0{,}4040 \end{vmatrix} = 0{,}2598$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0{,}2333 & -0{,}6667 \\ -0{,}2667 & -0{,}4040 \end{vmatrix} = 0{,}2721$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 0{,}2333 & -1{,}5596 \\ -0{,}2667 & -0{,}5555 \end{vmatrix} = -0{,}5455$$

$$a_{11} : a_{21} : a_{31} = A_{11} : A_{12} : A_{13}$$
$$0{,}2598 : 0{,}2721 : -0{,}5455$$
$$1 : 1{,}05 : -2{,}10$$



Rys. 1.5. Pierwsza postać drgań własnych

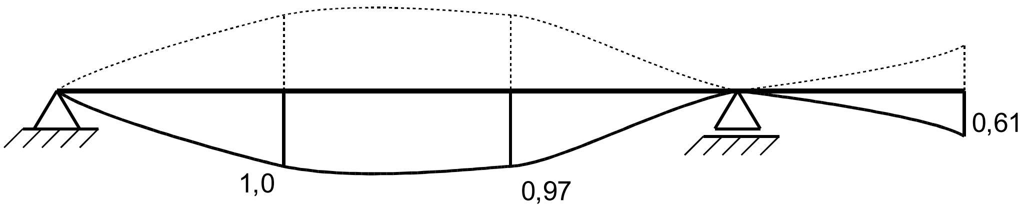
- II postać $\lambda_2 = 0{,}2688$, $\omega_2 = 112{,}80$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{4}{15} - 0{,}2688 & \frac{7}{18} & -\frac{18}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{4}{9} - 0{,}2688 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{5}{9} & 1{,}6 - 0{,}2688 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} -0{,}0021 & 0{,}3889 & -0{,}5333 \\ 0{,}2333 & 0{,}1756 & -0{,}6667 \\ -0{,}2667 & -0{,}5555 & 1{,}3312 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0{,}1756 & -0{,}6667 \\ -0{,}5555 & 1{,}3312 \end{vmatrix} = -0{,}1366$$
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0{,}2333 & -0{,}6667 \\ -0{,}2667 & 1{,}3312 \end{vmatrix} = -0{,}1327$$
$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0{,}2333 & 0{,}1756 \\ -0{,}2667 & -0{,}5555 \end{vmatrix} = -0{,}0828$$

$$a_{11} : a_{21} : a_{31} = A_{11} : A_{12} : A_{13}$$
$$0{,}1366 : 0{,}1327 : 0{,}0828$$
$$1 : 0{,}97 : 0{,}61$$



Rys. 1.6. Druga postać drgań własnych

- III postać $\lambda_3 = 0{,}0384$, $\omega_3 = 298{,}43$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{4}{15} - 0{,}0384 & \frac{7}{18} & -\frac{18}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{4}{9} - 0{,}0384 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{5}{9} & 1{,}6 - 0{,}0384 \end{vmatrix}$$

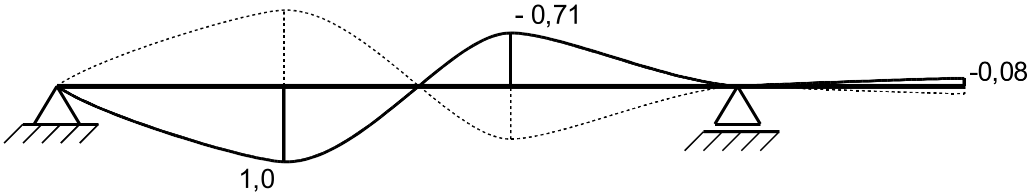
$$A = \begin{vmatrix} 0{,}2283 & 0{,}3889 & -0{,}5333 \\ 0{,}2333 & 0{,}4060 & -0{,}6667 \\ -0{,}2667 & -0{,}5555 & 1{,}5616 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0{,}4060 & -0{,}6667 \\ -0{,}5555 & 1{,}5616 \end{vmatrix} = 0{,}2636$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0{,}2333 & -0{,}6667 \\ -0{,}2667 & 1{,}5616 \end{vmatrix} = -0{,}1865$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0{,}2333 & 0{,}4060 \\ -0{,}2667 & -0{,}5555 \end{vmatrix} = -0{,}0213$$

$$a_{11} : a_{21} : a_{31} = A_{11} : A_{12} : A_{13}$$
$$0{,}2636 : -0{,}1865 : -0{,}0213$$
$$1 : -0{,}71 : -0{,}08$$



Rys. 1.7. Trzecia postać drgań własnych

- Sprawdzenie ortogonalności postaci drgań własnych

$$\sum a_{i1} m_i a_{i2} = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \; + 1{,}05 \cdot 1 \cdot 0{,}97 \; - 2{,}10 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}61 \; = 0{,}08 \approx 0$$
$$\sum a_{i1} m_i a_{i3} = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \; + 1{,}05 \cdot 1 \cdot (-0{,}71) + 2{,}10 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}08 \; = 0{,}06 \approx 0$$
$$\sum a_{i2} m_i a_{i3} = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \; + 0{,}97 \cdot 1 \cdot (-0{,}71) + 0{,}61 \cdot 1{,}2 \cdot (-0{,}08) = -0{,}15 \approx 0$$

3. Obliczenie amplitud drgań wymuszonych

$$\left(\underline{D}\,\underline{M}-\frac{1}{p^2}\underline{I}\right)\underline{a}=-\frac{1}{p^2}\underline{D}\,\underline{P}$$

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{500^2}=4\cdot 10^{-6}\approx 0$$

$$\frac{1}{p^2}P=\frac{1}{500^{2}\,1000}=4\cdot 10^{-3}$$

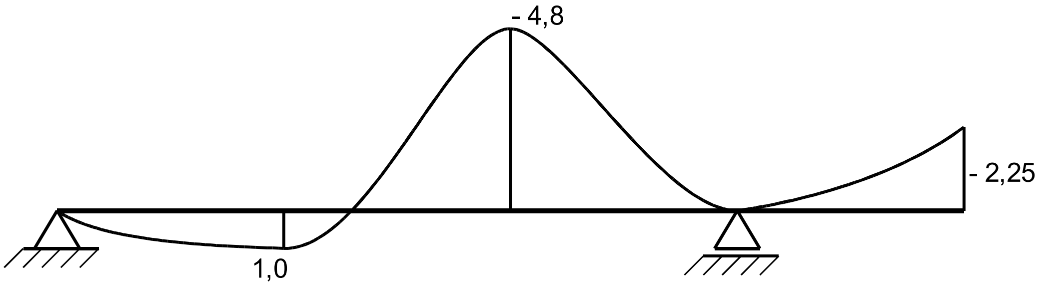
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{15}-\frac{1}{p^2} & \frac{7}{18} & -\frac{8}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{4}{9}-\frac{1}{p^2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{5}{9} & 1{,}6-\frac{1}{p^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{p^2}P\,\delta_{11} \\ -\frac{1}{p^2}P\,\delta_{22} \\ -\frac{1}{p^2}P\,\delta_{33} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{7}{18} & -\frac{8}{15} \\ \frac{7}{30} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{5}{9} & 1{,}6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4\cdot\frac{4}{9} \\ 4\cdot\frac{4}{9} \\ 4\cdot\frac{4}{3} \end{Bmatrix}\cdot(-10^{-3})$$

Po rozwiązaniu układu otrzymano

$$\begin{aligned} a_1 &= \ \ 0{,}00444\ [m] \\ a_2 &= -0{,}02133\ [m] \\ a_3 &= -0{,}01000\ [m] \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} a_1 : a_2 : a_3 \\ 1 : -4{,}8 : -2{,}25 \end{matrix}$$



Rys. 1.8. Postać drgań wymuszonych

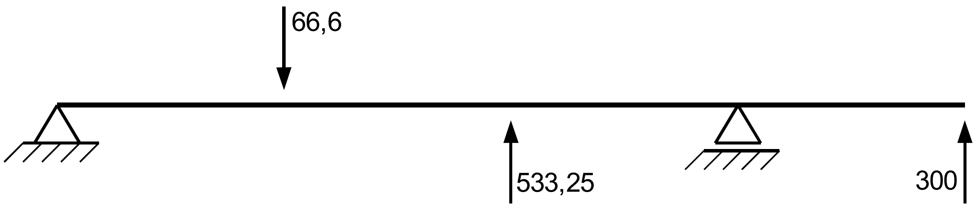
j

4. Obwiednia dynamicznych momentów zginających

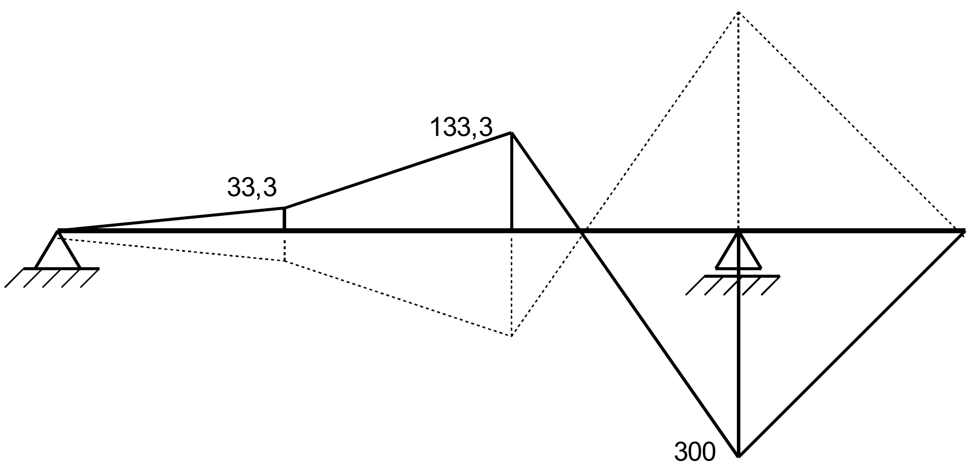
Obliczenie wartości sił dynamicznych działających na masy:

$$B_i = m_i\, p^2\, a_i$$

$$B_1 = 60 \cdot 500^2 \cdot 0{,}00444 = 66\ 600 = 66{,}6\ [kN]$$
$$B_2 = 100 \cdot 500^2 \cdot (-0{,}02133) = -533\ 250 = -533{,}25\ [kN]$$
$$B_3 = 120 \cdot 500^2 \cdot (-0{,}01) = -300\ 000 = -300\ [kN]$$



Rys. 1.9. Schemat działania sił dynamicznych



Rys. 1.10. Wartości momentów zginających od obciążenia dynamicznego

Siły wewnętrzne w belce wywołane obciążeniem dynamicznym znacznie przekraczają nośność przyjętego przekroju.