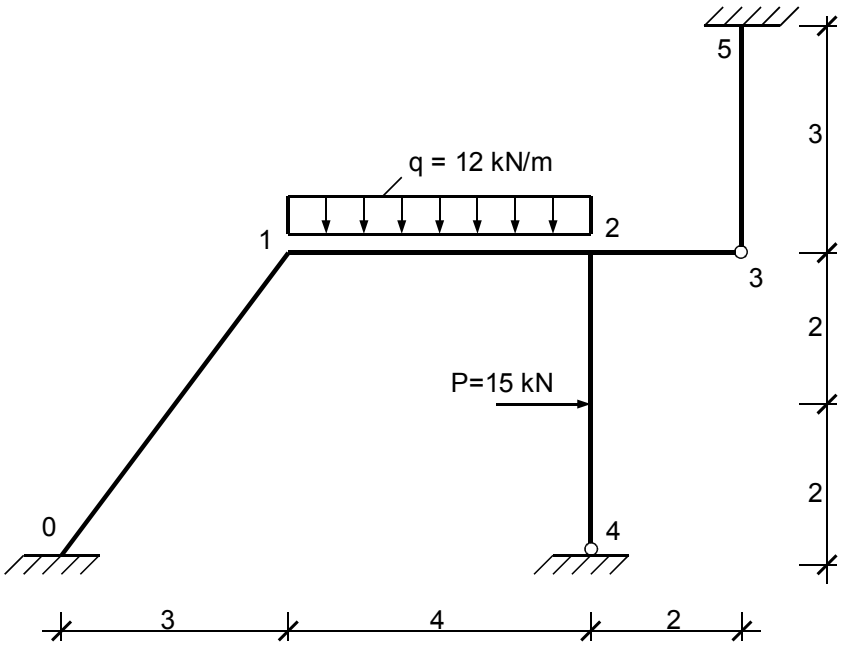
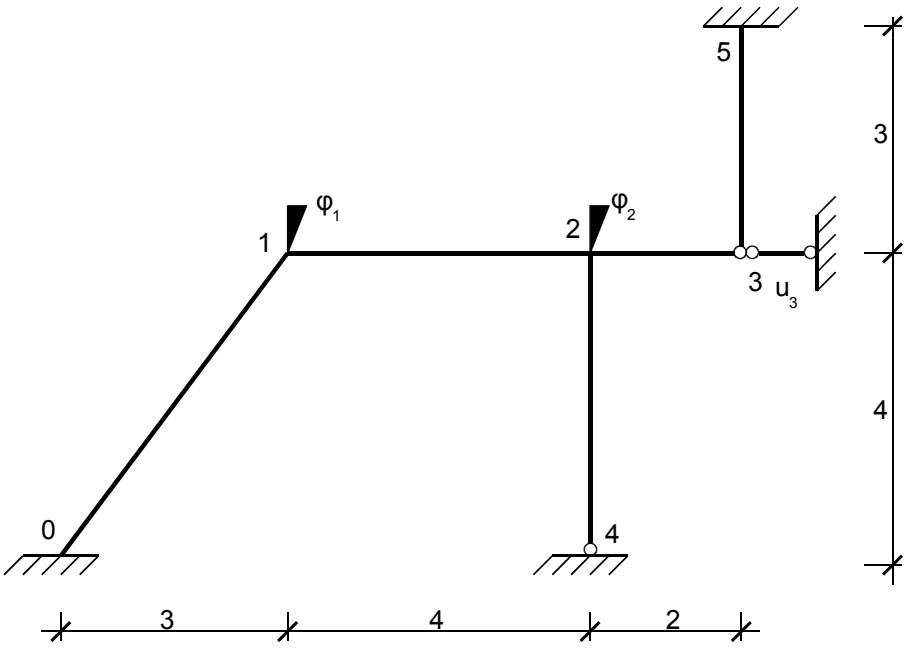
1.

1. METODA PRZEMIESZCZEŃ

1.1. Obliczanie sił wewnętrznych od obciążenia zewnętrznego



Rys. 1.1. Schemat konstrukcji

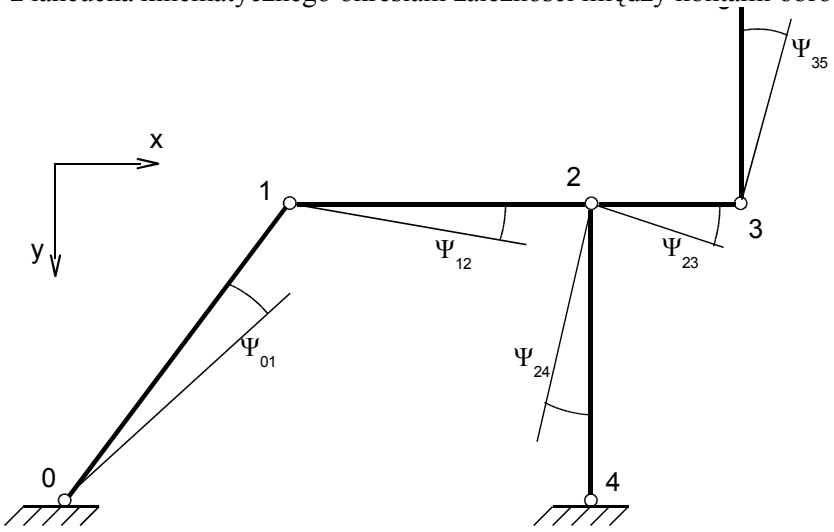


Rys. 1.2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Do wyliczenia mamy 3 niewiadome:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1 \\ z_2 &= \varphi_2 \\ z_3 &= \Delta_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Korzystając z łańcucha kinematycznego określam zależności między kontami obrotu cięciw prętów:



Rys. 1.3. Łańcuch kinematyczny

Łańcuch 0-1-2-4:

$$\begin{aligned} &\sum X: 4\Psi_{01} - 4\Psi_{23} = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi_{01} = \Psi_{23} \\ &\sum Y: 3\Psi_{01} + 4\Psi_{12} = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi_{12} = -\frac{3}{4}\Psi_{01} \end{aligned} \tag{1.2}$$

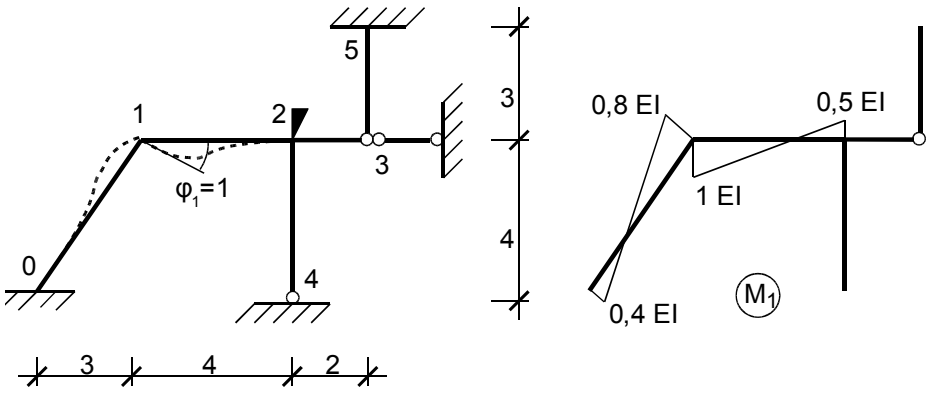
Łańcuch 4-2-3-5:

$$\begin{aligned} &\sum X: 4\Psi_{24} + 0 + 3\Psi_{35} = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi_{35} = -\frac{4}{3}\Psi_{24} \\ &\sum Y: 0 + 2\Psi_{23} + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi_{23} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Przy założeniu, że $\Psi_{24} = \Psi$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Psi_{01} &= \Psi \\ \Psi_{12} &= -\frac{3}{4}\Psi \\ \Psi_{23} &= 0 \\ \Psi_{24} &= \Psi \\ \Psi_{35} &= -\frac{4}{3}\Psi \end{aligned} \tag{1.4}$$

Stan $z_1 = 1$ ($\varphi_1 = 1$)



Rys. 1.4. Stan $z_1 = 1$

Wartości momentów obliczam ze wzorów transformacyjnych:

- dla belki obustronnie utwierdzonej:

$$M_{ik} = 2\frac{EI}{l}(2\varphi_i + \varphi_k - 3\Psi_{ik}) + M_{ik}^0$$
$$M_{ki} = 2\frac{EI}{l}(2\varphi_k + \varphi_i - 3\Psi_{ik}) + M_{ki}^0 \qquad (1.5)$$

- dla belki utwierdzonej z jednej strony i połączonej przegubem z drugiej:

$$M_{ik} = 3\frac{EI}{l}(\varphi_i - \Psi_{ik}) + M_{ik}^0$$
$$M_{ki} = 0 \qquad (1.6)$$

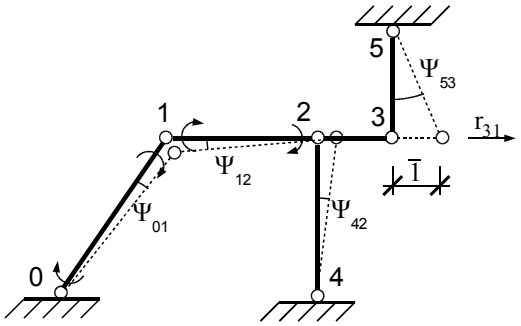
Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy

$$M_{01} = 0{,}4\ EI$$
$$M_{10} = 0{,}8\ EI$$
$$M_{12} = 1{,}0\ EI \qquad (1.7)$$
$$M_{21} = 0{,}5\ EI$$

Na podstawie warunków równowagi węzłów wyznaczam wartości r_{11} i r_{21}

$$r_{11} = \frac{4}{5}EI + 1\ EI = 1{,}8\ EI$$
$$r_{21} = 0{,}5\ EI \qquad (1.8)$$

Korzystając z zasady pracy wirtualnej obliczam wartość r_{31}

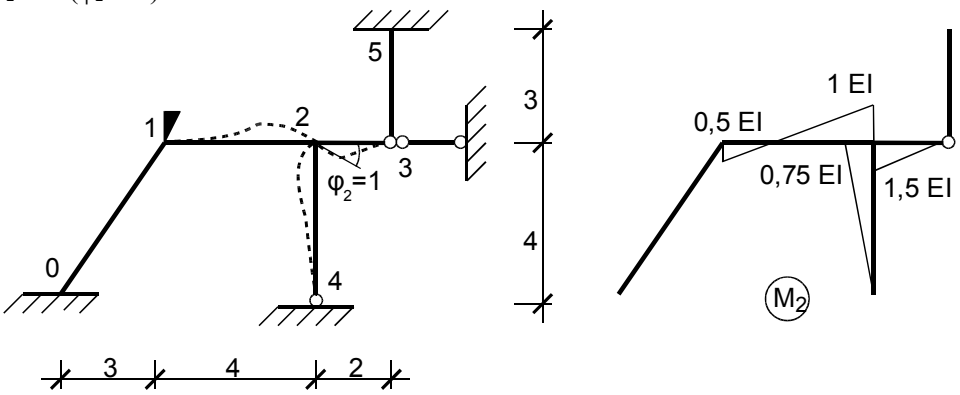


Rys. 1.5. Wirtualne przemieszczenie więzu nr 3

Zgodnie z zasadą pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie przemieszczenia można zapisać:

$$r_{31}\cdot\bar{1}+(0{,}8\ EI+0{,}4\ EI)\Psi_{01}+(1\ EI+0{,}5\ EI)\Psi_{12}=0$$
$$r_{31}+1{,}2\ EI\cdot\frac{1}{4}+1{,}5\,EI\,(-\frac{3}{16})=0 \qquad (1.6)$$
$$r_{31}=-0{,}01875\ EI$$

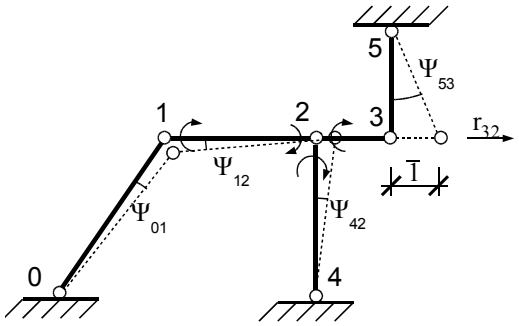
Stan $z_2 = 1$ ($\varphi_2 = 1$)



Rys. 1.6. Stan $z_2 = 1$

Wartości r_{12}, r_{22} i r_{31} obliczono postępując podobnie jak przy stanie $z_1 = 1$

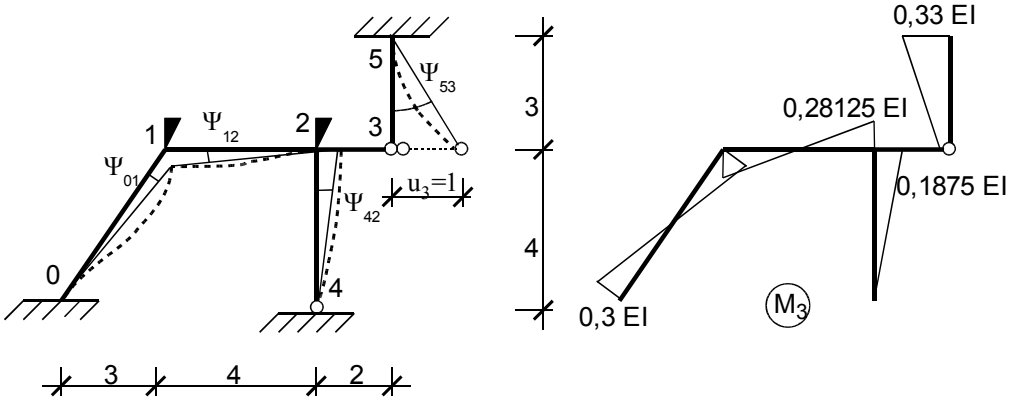
$$r_{12}=0{,}5\ EI$$
$$r_{21}=1\ EI+0{,}7525\ EI+1{,}5\ EI=3{,}2525\ EI \qquad (1.7)$$



Rys. 1.7. Wirtualne przemieszczenie więzu nr 3

$$r_{32}\cdot\bar{1}+(0{,}5\,EI+1\,EI)\,\Psi_{12}+0{,}75\,EI\cdot\Psi_{24}=0$$
$$r_{32}+1{,}5\,EI\,(-\frac{3}{16})+0{,}75\,EI\cdot\frac{1}{4}=0 \qquad (1.8)$$
$$r_{32}=0{,}09375\,EI$$

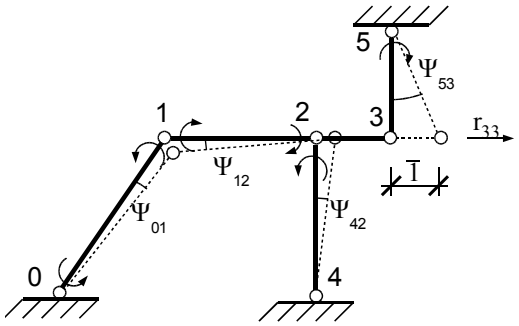
Stan $z_3 = 1$ ($u_3 = 1$)



Rys. 1.8. Stan $z_3 = 1$

Wartości r_{12}, r_{22} i r_{31} obliczono postępując podobnie jak przy stanie $z_1 = 1$

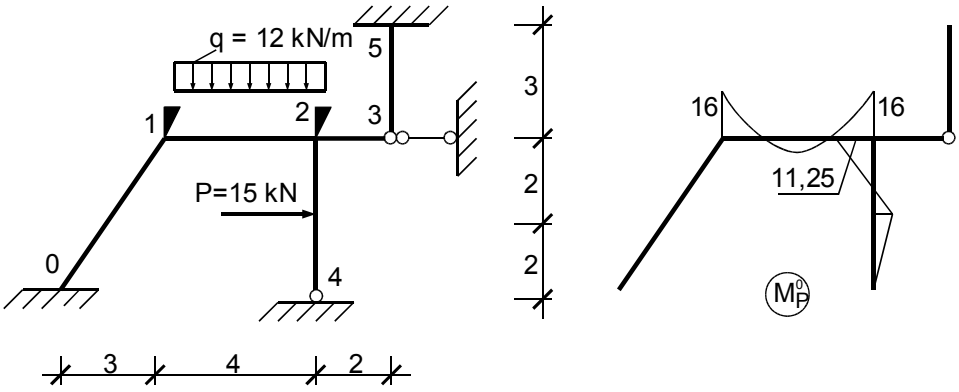
$$r_{13}=0{,}3\,EI-0{,}28125\,EI=0{,}01875\;\;EI$$
$$r_{21}=0{,}28125\,EI-0{,}1875\,EI=0{,}09375\;\;EI \qquad (1.9)$$



Rys. 1.9. Wirtualne przemieszczenie więzu nr 3

$$
\begin{aligned}
&r_{33}\cdot\bar{1}-(2\cdot 0{,}3\,EI)\Psi_{01}+(2\cdot 0{,}28125\,EI)\Psi_{12}-0{,}1875\,EI\,\Psi_{24}+0{,}33\,EI\,\Psi_{35}=0\\
&r_{33}-0{,}6\,EI\cdot\frac{1}{4}-0{,}5625\,EI\,(-\frac{3}{16})-0{,}1875\,EI\cdot\frac{1}{4}+0{,}33\,EI\,(-\frac{4}{12})=0\\
&r_{32}=0{,}41345\,EI
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

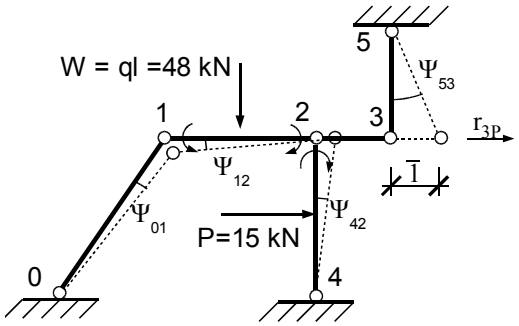
Stan "P"



Rys. 1.10. Stan "P"

Wartości r_{12}, r_{22} i r_{31} obliczono postępując podobnie jak wcześniej

$$
\begin{aligned}
r_{1p}&=-16\\
r_{2p}&=16+11{,}25=27{,}25
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$



Rys. 1.11. Wirtualne przemieszczenie więzu nr 3

$$\begin{aligned} &r_{3P}\cdot\bar{1}+(16-16)\Psi_{12}+W\cdot\Psi_{12}\cdot\frac{4}{2}+11{,}25\ \Psi_{24}+P\cdot\Psi_{24}\cdot\frac{4}{2}=0\\ &r_{3P}+48\cdot\frac{3}{16}\cdot 2+11{,}25\cdot\frac{1}{4}+15\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=0\\ &r_{3p}=-28{,}3152 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Znając wartości współczynników r_{ik} i r_{ip} można obliczyć wartości przemieszczeń niewiadomych:

$$\begin{bmatrix} 1{,}8\,EI & 0{,}5\,EI & -0{,}01875\,EI\\ 0{,}5\,EI & 3{,}2525\,EI & 0{,}09375\,EI\\ -0{,}01875\,EI & 0{,}09375\,EI & 0{,}41345\,EI \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} -16\\ 27{,}25\\ -28{,}3125 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.13}$$

Po rozwiązaniu układu otrzymano:

$$\begin{aligned} &z_1=\varphi_1=13{,}10\ EI^{-1}\\ &z_1=\varphi_2=-12{,}46\ EI^{-1}\\ &z_3=u_3=71{,}90\ EI^{-1} \end{aligned} \tag{1.14}$$

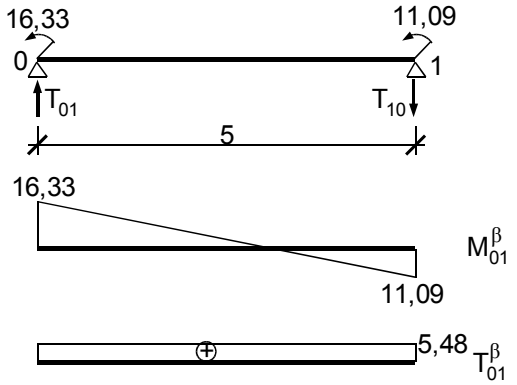
Znając wartości przemieszczeń można obliczyć wartości momentów przywęzłowych korzystając z zależności:

$$M_{ik}=M_{ik}^{0}+M_{ik}^{(1)}\varphi_1+M_{ik}^{(2)}\varphi_2+M_{ik}^{(3)}u_3 \tag{1.15}$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymano:

$$\begin{aligned} &M_{01}=-16{,}33\\ &M_{10}=-11{,}09\\ &M_{12}=\ 11{,}09\\ &M_{21}=\ 30{,}31 \qquad [kNm]\\ &M_{23}=-18{,}70\\ &M_{24}=-11{,}58\\ &M_{53}=\ 23{,}96 \end{aligned} \tag{1.16}$$

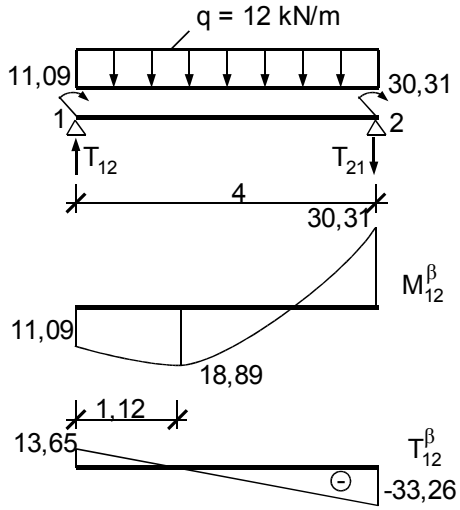
Pręt 0 – 1



Rys. 1.12. Rzeczywiste siły wewnętrzne w pręcie 0 – 1 [kN, kNm]

$$T_{10} = T_{01} = \frac{16{,}33 + 11{,}09}{5} = 5{,}48 \tag{1.17}$$

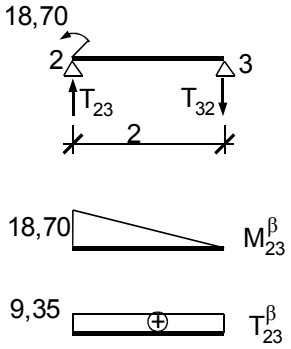
Pręt 1 – 2



Rys. 1.13. Rzeczywiste siły wewnętrzne w pręcie 1 – 2 [kN, kNm]

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{-11{,}09 - 26{,}64}{4} + \frac{12 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 13{,}65 \\ T_{21} &= \frac{-11{,}09 - 26{,}64}{4} - \frac{12 \cdot 4 \cdot 2}{4} = -33{,}26 \end{aligned} \tag{1.18}$$

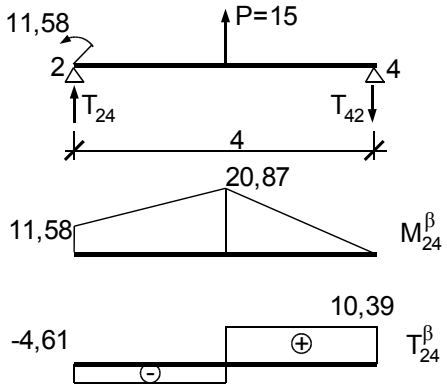
Pręt 2 – 3



Rys. 1.14. Rzeczywiste siły wewnętrzne w pręcie 2 – 3 [kN, kNm]

$$T_{23} = T_{32} = \frac{18,70}{2} = 9,35 \tag{1.19}$$

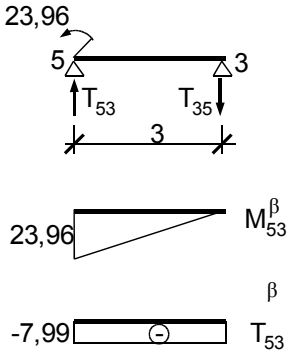
Pręt 2 – 4



Rys. 1.15. Rzeczywiste siły wewnętrzne w pręcie 2 – 4 [kN, kNm]

$$T_{24} = \frac{11,58}{4} - \frac{15}{2} = -4,61$$
$$T_{42} = \frac{11,58}{4} + \frac{15}{2} = 10,39 \tag{1.20}$$

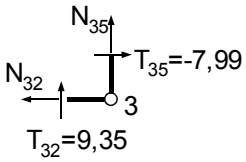
Pręt 5 – 3



Rys. 1.16. Rzeczywiste siły wewnętrzne w pręcie 5 – 3 [kN, kNm]

$$T_{24} = T_{42} = \frac{-23,96}{3} = -7,99 \tag{1.21}$$

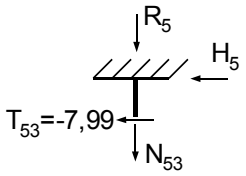
Węzeł 3



Rys. 1.17. Rzeczywiste siły w węźle 3 [kN]

$$\begin{aligned} N_{35} &= -9,35 \\ N_{32} &= -7,99 \end{aligned} \tag{1.22}$$

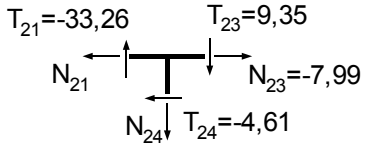
Węzeł 5



Rys. 1.18. Rzeczywiste siły w węźle 5 [kN]

$$\begin{aligned} N_{53} &= N_{35} = -9,35 \\ R_5 &= 9,35 \\ H_5 &= 7,99 \end{aligned} \tag{1.23}$$

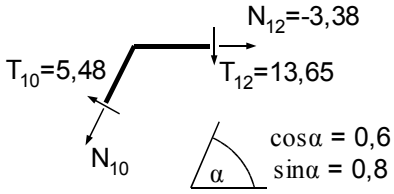
Węzeł 2



Rys. 1.19. Rzeczywiste siły w węźle 2 [kN]

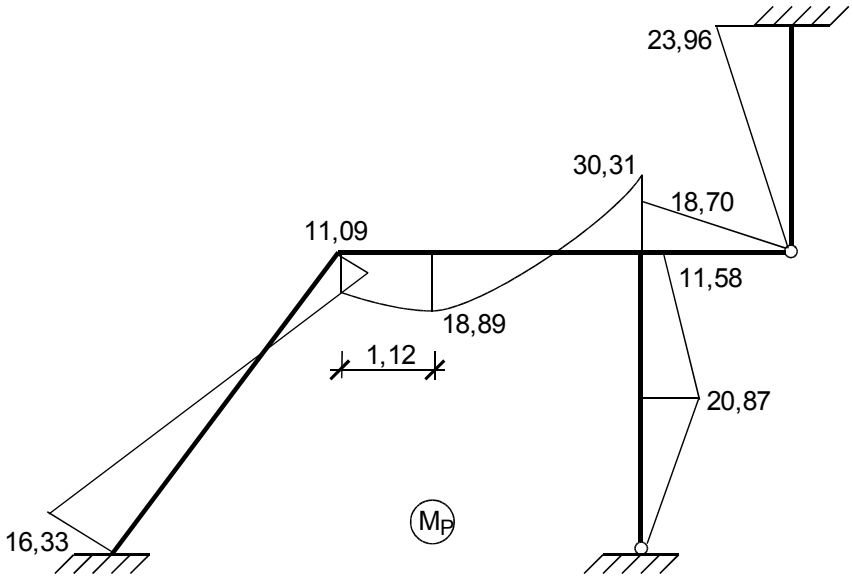
$$N_{21} = -7{,}99 + 4{,}61 = -3{,}38$$
$$N_{24} = -33{,}36 - 9{,}35 = -42{,}61 \tag{1.24}$$

Węzeł 1

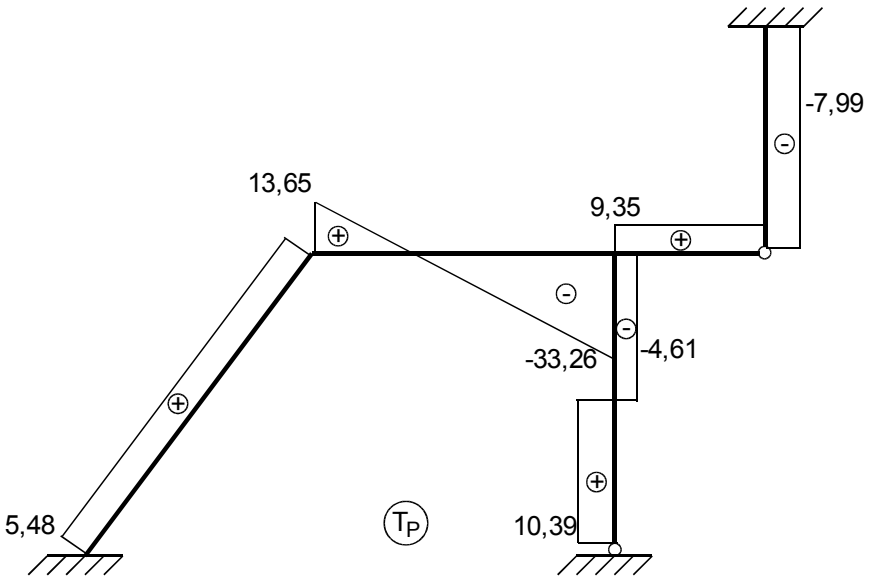


Rys. 1.20. Rzeczywiste siły w węźle 1 [kN]

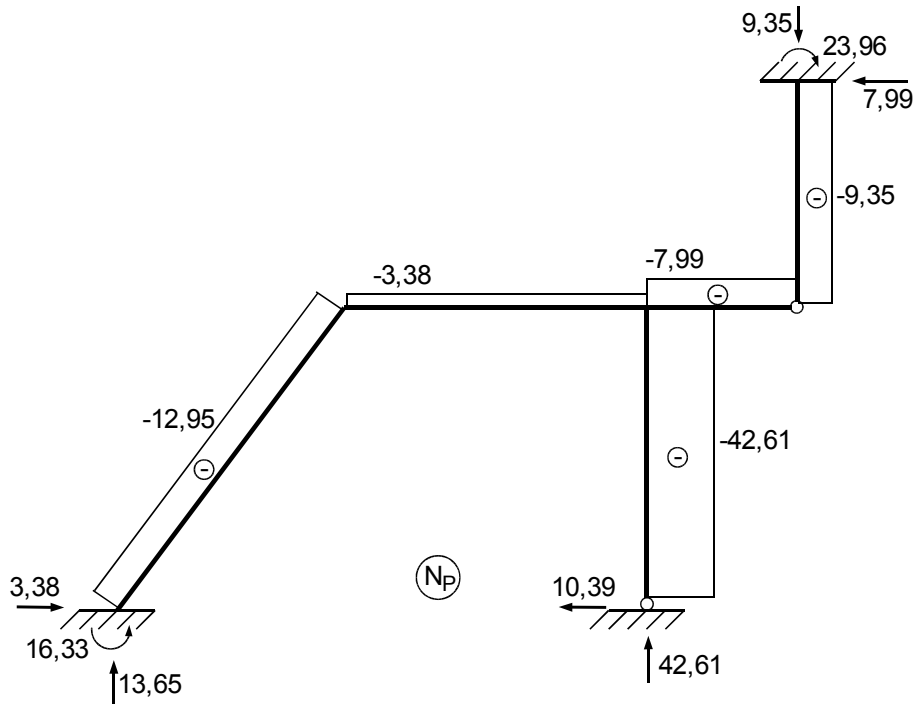
$$-T_{10} \cdot 0{,}8 - N_{10} \cdot 0{,}6 + N_{12} = 0$$
$$N_{10} = -12{,}95 \tag{1.25}$$



Rys. 1.22. Wykres rzeczywistych momentów zginających [kNm]



Rys. 1.23. Wykres rzeczywistych sił tnących [kN]



Rys. 1.24. Wykres rzeczywistych sił normalnych i reakcji [kN, kNm]

Kontrola statyczna:

$$\begin{aligned}
&\sum X = 3{,}38 - 10{,}39 - 7{,}99 + 15 = 0 \\
&\sum Y = 13{,}65 + 42{,}61 - 9{,}35 - 12 \cdot 4 = 0{,}09 \approx 0 \\
&\sum M^0 = -16{,}33 - 42{,}61 \cdot 7 - 7{,}99 \cdot 7 + 9{,}35 \cdot 9 + 23{,}96 + 12 \cdot 4 \cdot 5 + 15 \cdot 2 = 0{,}76 \approx 0
\end{aligned} \tag{1.26}$$