

1. WSTĘP

1.1. Temat pracy

Praca przedstawia analizę statyki, dynamiki i stateczności płyt cienkich w ujęciu metody elementów brzegowych (MEB) z wykorzystaniem nowego sformułowania warunków brzegowych. Metoda elementów brzegowych należy do gałęzi metod komputerowych i jest obok metody elementów skończonych (MES) głównym narzędziem wykorzystywanym w analizie konstrukcji.

1.2. Wprowadzenie do metody elementów brzegowych (MEB)

Metody komputerowe są dzisiaj podstawowym narzędziem służącym do rozwiązywania wielu złożonych problemów z dziedziny mechaniki. Budowanie uniwersalnych algorytmów numerycznych pozwala uwzględnić dowolny kształt analizowanej struktury jak i warunki brzegowe.

Metoda elementów brzegowych rozwija się w ostatnich latach bardzo dynamicznie. Wielką jej zaletą jest względna prostota formułowania i rozwiązywania skomplikowanych zagadnień teorii potencjału, teorii sprężystości oraz analizy i optymalizacji konstrukcji inżynierskich. W zadaniach przestrzennych, dyskretyzacji ulega zwykle powierzchnia ciała, a w zadaniach płaskich jego brzeg, co zmniejsza o rząd wymiar problemu.

Do wyprowadzenia równań całkowych opisujących zadanie, niezbędna jest znajomość rozwiązania podstawowego (fundamentalnego). Jest ono bardzo ważnym pojęciem stosowanym w MEB, któremu można nadać sens fizyczny.

Metoda elementów brzegowych nie wymaga znacznego stopnia dyskretyzacji i daje możliwość obliczania odpowiednich całek brzegowych w sposób analityczny. Jej podstawy wiążą się z klasyczną teorią potencjału opisaną przez Kelloga [30]. Jaswon [26], Symm [56], Jaswon i Ponter [27] zastosowali równania całkowe w statycznych zagadnieniach potencjalnych, a Kupradze [31] i Michlin [35] wprowadzili wielowymiarowe osobliwe równania całkowe do zadań brzegowych teorii sprężystości. Prace te stworzyły teoretyczną podstawę metody brzegowych równań całkowych. Mała popularność tej metody wynikała początkowo z braku odpowiednich narzędzi obliczeniowych służących do rozwiązywania dużych układów równań algebraicznych, które buduje się przez skończenie wymiarową aproksymację zadań opisanych wyżej wymienionymi równaniami.

Powszechne zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej w drugiej połowie XX wieku sprawiło, że metody numeryczne, a w tym MEB, zaczęły się intensywnie rozwijać. Nazwę metody

wprowadzili do literatury naukowej Banerjee i Butterfield [3] oraz Brebbia i Dominguez [8] w 1977 roku.

Zainteresowanie MEB stało się intensywniejsze, gdy stwierdzono jej większą skuteczność i dokładność niż metody elementów skończonych w zadaniach badających wpływ kształtu brzegu oraz warunków brzegowych na rozwiązanie problemu.

Metoda elementów brzegowych rozwinęła się dwugałęziowo, co związane jest ze sposobem formułowania brzegowych równań całkowych. W podejściu tzw. bezpośrednim, zadanie formułowane jest wprost za pomocą wielkości fizycznych takich jak przemieszczenia i siły. Podejście pośrednie pozwala sformułować zadanie brzegowe dla funkcji nie mających znaczenia fizycznego, z których wyznacza się poszukiwane wielkości.

Rozwiązanie brzegowych równań całkowych przedstawia zwykle duże trudności. Przybliża się więc metodę rozwiązania, która polega na dyskretyzacji brzegu i wprowadzeniu skończonej liczby elementów brzegowych. Wzdłuż każdego elementu funkcje brzegowe aproksymuje się za pomocą wartości węzłowych i funkcji interpolacyjnych zwanych funkcjami kształtu. Rezultatem jest otrzymanie układu skończonej liczby równań algebraicznych. MEB umożliwia wprowadzenie elementu o stałym rozkładzie wielkości brzegowej, tzn. elementu typu „constans”. Jest to najprostszy, bardzo popularny i efektywny typ elementu stosowany w analizie numerycznej. Umożliwia on obliczenie odpowiednich całek brzegowych w sposób analityczny. Element typu „constans” będzie stosowany w pracy.

Pewną niedogodnością kolokacyjnej wersji MEB jest niesymetryczny układ równań algebraicznych. Biorąc jednak pod uwagę możliwości obliczeniowe dzisiejszych komputerów, cecha ta nie jest znaczącą wadą. Inną wyróżniającą cechą MEB jest występowanie funkcji mających osobliwość. Należy wtedy dokonać obliczania całek. Pewnym akceptowanym rozwiązaniem tego problemu jest nieosobliwe formułowanie brzegowych równań całkowych. Takie podejście będzie zastosowane w pracy.

Budując układ równań algebraicznych, niezbędne jest wykonanie całkowania po obszarze obciążenia (powierzchni lub objętości). Takie obliczenia można sprowadzić do całkowania po brzegu obszaru obciążenia, co przedstawili Hartley i Abdel-Akher [1].

Metoda elementów brzegowych ma ugruntowane podstawy matematyczne i stała się bardzo efektywnym narzędziem mechaniki komputerowej. Ma zastosowanie do zadań liniowych i nieliniowych, aproksymowanych jako przyrostowo liniowe, np. nieliniowość warunków brzegowych, która ma miejsce w przypadku więzów jednostronnych. Wymaga zwykle dyskretyzacji brzegu ciała i daje dokładniejsze wyniki niż metoda elementów skończonych przy

tym samym stopniu dyskretyzacji, co jest dogodnie do rozwiązywania zadań z dużymi gradientami naprężeń.

Rozwiązania fundamentalne stosowane w MEB dają możliwość analizy zadań dla obszarów nieskończonych lub półnieskończonych (np. płyta spoczywająca na podłożu sprężystym [4, 9, 32, 62], drgania płyty w ośrodku cieczy [22]) bez potrzeby wprowadzania sztucznych granic.

Metodę elementów brzegowych można wykorzystywać również do problemów o bardziej złożonym charakterze. Beskos, posłużył się aparatem MEB do rozwiązania problemu dynamiki w układach niesprężystych [6].

Rashed, Aliabadi i Brebbia zastosowali w pracy [47] bardziej złożone podejście, tzw. sformułowanie mocno osobliwe (hypersingular formulation). Do wyprowadzenia całkowych równań brzegowych stosuje się wtedy n -te pochodne funkcji.

Ogólną teorię metody elementów brzegowych opisał w sposób bardzo szczegółowy Burczyński [10]. Rozwiązania fundamentalne dla dyskretnych układów jednowymiarowych (struna i belka) oraz układów dwuwymiarowych (siatka, tarcza i ruszt) wyprowadzili Pawlak, Rakowski i Wielenetejczyk [39-46]. Kamiński [28] wykorzystał MEB do rozwiązywania problemów mechaniki stochastycznej.

1.3. Analiza płyt w ujęciu analitycznym i metody elementów brzegowych

W dziedzinie analizy płyt, za fundamentalne należy uznać prace Timoshenki [58, 59], Girkmanna [18], Nowackiego [37] i Kączkowskiego [29], a także prace Ganowicza [16], który jako pierwszy podał rozwiązanie fundamentalne dla płyt średniej grubości. Rozwiązanie to wykorzystali Okupniak i Sygulski [38] do nieosobliwego sformułowania zadania statyki płyt Reissnera w ujęciu MEB.

Sformułowanie całkowe zginania płyt wyprowadzili Jaswon i Maiti w 1968 roku [25]. Altiero i Sikarskie w 1978 roku [2] zaproponowali podejście pośrednie MEB w analizie aginania płyty. W 1978 roku podejście bezpośrednie zaprezentowali Bezine i Gamby [7], a rok później Stern [51]. Debbih [13, 14] dokonał porównania efektywności MEB i MES oraz przeprowadził porównanie teorii płyt cienkich z teorią płyt średniej grubości.

W 1990 roku Shi [50] wykorzystał MEB do analizy drgań i stateczności płyt ortotropowych. Autor wprowadził w obrębie płyty dodatkowe wewnętrzne punkty kolokacji, w których poszukiwanymi wielkościami były przemieszczenia i krzywizny. Identyczne podejście zastosowali Xiao [62] oraz Chuheepsakul i Chinnaboon [12] analizując zginanie płyt spoczywających na podłożu sprężystym.

Beskos [5] wykorzystał MEB w analizie dynamiki płyt, a Wen, Aliabadi i Young [60] oraz Tanaka, Matsumoto i Shiozaki [57] zastosowali MEB w dynamice płyt cienkich z uwzględnieniem pęknięcia. Chang-jun zastosował brzegowe równania całkowe [11] do rozwiązania problemu stateczności płyt z perforacją.

Liu [34] zaproponował aparat MEB do rozwiązania zadania powłoki będącej złożeniem kilku powierzchni płytowych.

Zmodyfikowaną teorię płyt cienkich w ujęciu MEB zaprezentował El-Zafrany, Debbih i Fadhil [63]. Autor wprowadził dodatkowe niewiadome na brzegu płyty w postaci momentu skręcającego i odpowiadającego mu stycznego kąta obrotu. Fizyczne warunki brzegowe w analizie statyki płyt cienkich w ujęciu MEB zaproponowali Guminiak, Okupniak i Sygulski [20]. Sformułowanie to, było wyjściowym do wyprowadzenia brzegowych równań całkowych opisujących zadanie zginania płyty cienkiej spoczywającej na podłożu sprężystym [21, 24], dynamiki płyt zanurzonych w cieczy [22] oraz w analizie stateczności początkowej płyt [23]. Analizę płyt spoczywającej na podporach słupowych w ujęciu MEB przeprowadził Rashed [48].

Problematyką dynamiki płyt w ujęciu analitycznym w ośrodku cieczy zajmowali się Montero de Espinosa i Gallego-Juarez [36], Fu i Price [15] oraz Liang, Liao, Tai i Lai [33]. Nad podobnymi zagadnieniami w ujęciu MEB, mającymi zastosowanie w analizie przekryć ciągnowych i ich współpracy z otaczającym powietrzem pracował Sygulski [52-55]. Prace te stały się podstawą do sformułowania zadania drgań własnych płyty zanurzonej w cieczy, które przedstawiono w rozprawie.

1.4. Cel pracy

Rozprawa stanowi rozszerzenie klasycznej wiedzy dotyczącej statyki, dynamiki i stateczności płyt cienkich. Głównym jej celem jest sformułowanie zadania zginania płyty bez potrzeby posługiwania się wielkościami, które służą jedynie do uzgodnienia liczby niewiadomych z rzędem równania różniczkowego płyty. Nowe sformułowanie jest elementem oryginalnym i bazuje na fizycznych warunkach brzegowych. Rozprawa ma również na celu sprawdzenie nieosobliwego podejścia MEB. Takie sformułowanie z uwagi na znaczne uproszczenie algorytmu obliczeń, jest bardzo dogodny do analizy wielorakich zadań mających zastosowanie inżynierskie. W pracy ograniczono się do zagadnień liniowo sprężystych w ramach teorii małych odkształceń i przemieszczeń. Zadanie zginania płyty spoczywającej na podłożu sprężystym z więzami jednostronnymi rozwiązano iteracyjnie, eliminując reakcje więzów, w których wystąpiło odrywanie.

1.5. Omówienie treści rozprawy

Rozprawa podzielona jest na osiem rozdziałów. W pierwszym, dokonano wprowadzenia do metody elementów brzegowych oraz przedstawiono przegląd prac naukowych z zakresu analizy płyt i samej metody.

Rozdział drugi poświęcony jest statyce płyt. Przytoczono liczne przykłady numeryczne i porównano rezultaty obliczeń z rozwiązaniami analitycznymi. Na większą uwagę zasługuje analiza wrażliwości rozwiązania na parametr odsunięcia punktu kolokacji od elementu brzegowego oraz analiza ukośnych płyt mostowych.

W rozdziale trzecim zaprezentowano zadania statyki płyt spoczywających na podporach słupowych, w tym płyty ukośnej mostowej. Poparto je odpowiednimi przykładami numerycznymi i zweryfikowano na podstawie znanych rozwiązań analitycznych i MES.

Rozdział czwarty poświęcono analizie zginania płyty spoczywającej na podłożu sprężystym typu: Winklera i półprzestrzeni sprężystej. Otrzymane wyniki porównano z innymi, również uzyskanymi metodą elementów brzegowych.

Rozdział piąty zawiera analizę dynamiki płyt, w tym ukośnej płyty mostowej oraz godne uwagi zadania z zakresu dynamiki płyt zanurzonych w cieczy. Część zadań zweryfikowano na podstawie znanych rozwiązań analitycznych.

W rozdziale szóstym rozwiązano zadanie stateczności początkowej płyt. Dokonano weryfikacji uzyskanych rozwiązań porównując je z wynikami znanymi z literatury.

Rozdział siódmy stanowią wnioski końcowe oraz szczegółowe podsumowanie pracy.

W rozdziale ósmym umieszczono spis literatury zawierający sześćdziesiąt trzy pozycje uznane przez autora za ważne w studiach nad omawianym problemem.