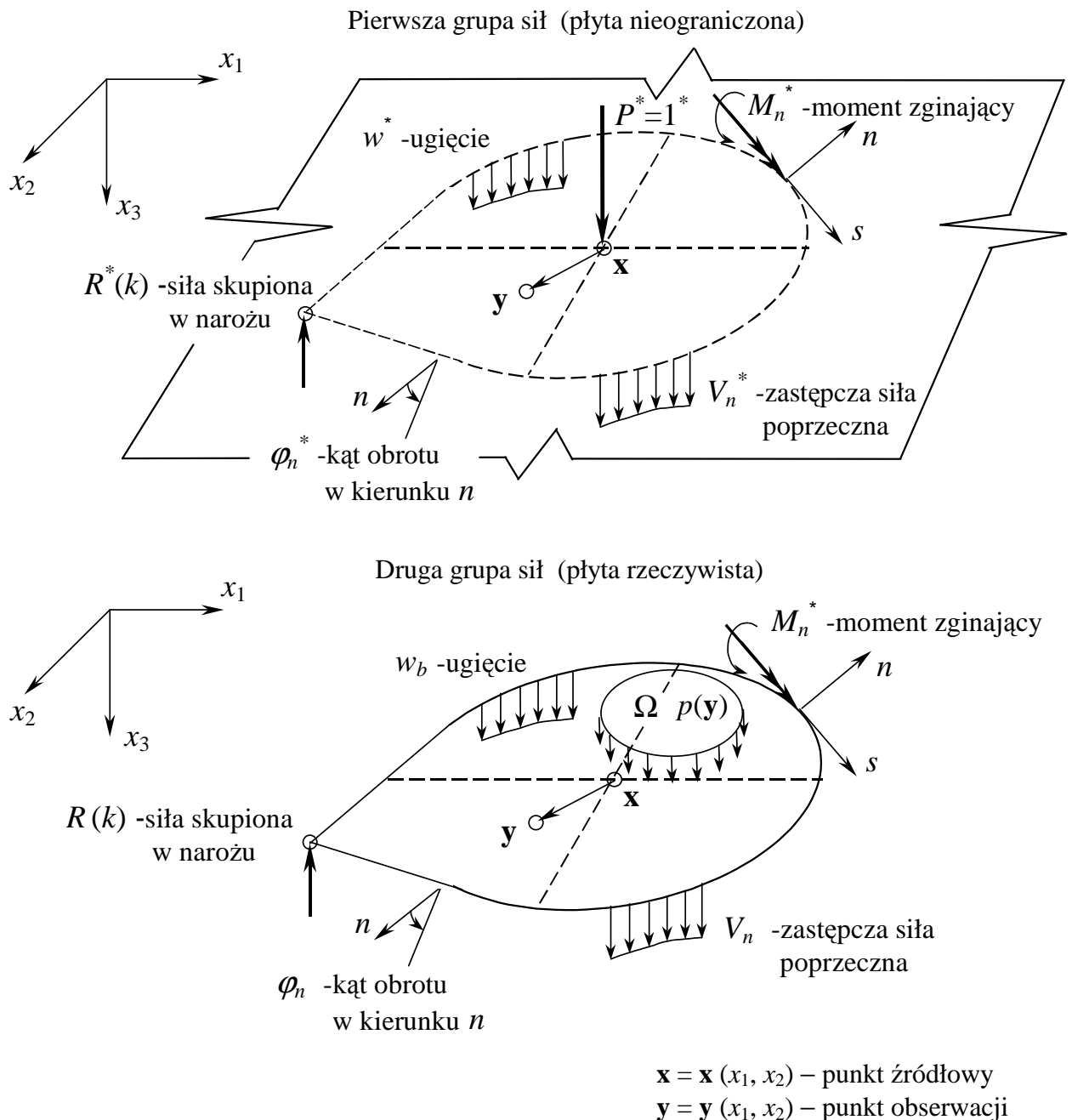


2.1. CAŁKOWE SFORMUŁOWANIE ZADANIA STATYKI

W większości prac dotyczących zastosowania MEB w teorii płyt cienkich wprowadza się w brzegowych równaniach całkowych wielkości znane z klasycznej teorii płyt, tj. zastępczą siłę poprzeczną na brzegu płyty i siły skupione w jej narożach (Rys.1a). Na brzegu płyty rozważa się dwie wielkości statyczne; zastępczą siłę poprzeczną V_n , moment zginający M_n oraz dwie wielkości geometryczne: ugięcie w_b i kąt obrotu φ_n . Brzegowe równania całkowe wyprowadza się stosując twierdzenie o wzajemności prac Bettiego. Rozważa się dwie płyty: nieskończoną, obciążoną jednostkową siłą skupioną oraz rzeczywistą, pod obciążeniem $p(y)$ (Rys.1a).



Rys. 1a. Wielkości występujące w brzegowych równaniach całkowych

Brzegowe równania całkowe będą miały postać:

$$\begin{aligned}
& c(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) - \sum_{k=1}^K R^*(k, \mathbf{x}) \cdot w(k) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) - \sum_{k=1}^K R(k, \mathbf{x}) \cdot w^*(k) + \\
& + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \frac{r^2}{8\pi} \ln(r)$ jest rozwiązaniem podstawowym (funkcją Greena) równania

biharmonicznego $\nabla^4 w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \bar{\delta}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$, a $\bar{\delta}$ jest deltą Diraca oraz

$c(\mathbf{x}) = 1$, kiedy \mathbf{x} jest położony wewnątrz obszaru płyty,

$c(\mathbf{x}) = 0.5$, kiedy \mathbf{x} jest położony na brzegu gładkim płyty,

$c(\mathbf{x}) = 0$, kiedy \mathbf{x} jest położony na zewnątrz obszaru płyty.

Drugie równanie (2.2) otrzymuje się, zastępując jednostkową siłę skupioną $P^* = 1^*$ jednostkowym momentem skupionym $M_n^* = 1^*$. Jest to równoważne zróżniczkowaniu pierwszego równania całkowego (2.1) względem współrzędnej n w punkcie \mathbf{x} płyty. Równanie to ma postać:

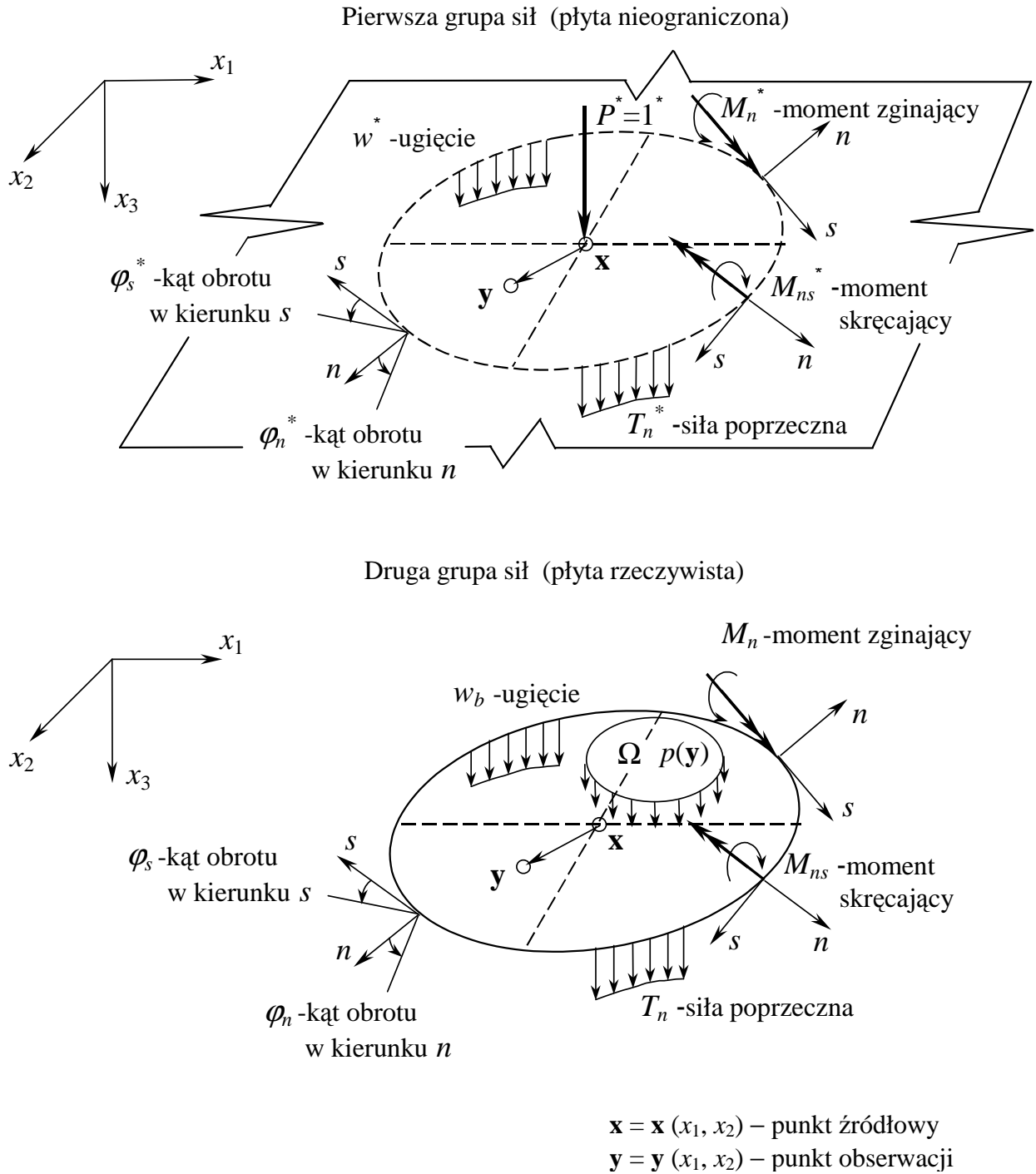
$$\begin{aligned}
& c(\mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \left[\bar{V}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - \bar{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) - \sum_{k=1}^K \bar{R}^*(k, \mathbf{x}) \cdot w(k) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(\mathbf{y}) \cdot \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \bar{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) - \sum_{k=1}^K R(k, \mathbf{x}) \cdot \bar{w}^*(k) + \\
& + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \bar{V}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{R}^*(k, \mathbf{x}), \bar{w}^*(k, \mathbf{x}), \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\} = \\
& = \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left\{ V_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), R^*(k, \mathbf{x}), w^*(k, \mathbf{x}), w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\}
\end{aligned}$$

Niniejsze opracowanie prezentuje nieco inne podejście, bez potrzeby posługiwania się wielkościami, które w klasycznej teorii służą do uzgodnienia liczby zmiennych brzegowych z rzędem równania różniczkowego płyty. Na brzegu płyty rozważa się trzy wielkości statyczne: siłę poprzeczną T_n , moment zginający M_n i moment skręcający M_{ns} oraz trzy wielkości geometryczne: ugięcie w_b , kąty obrotu φ_n oraz φ_s . Spośród tych wielkości, tylko dwie należy

traktować jako niewiadome. Brzegowe równania całkowe wyprowadza się podobnie jak w sformułowaniu klasycznym (równania: 2.1 i 2.2) wykorzystując twierdzenie o wzajemności prac Bettiego. Rozważa się dwie płyty: nieskończoną, obciążoną jednostkową siłą skupioną oraz rzeczywistą, pod obciążeniem $p(\mathbf{y})$ (Rys.1b).



Rys. 1b. Wielkości występujące w brzegowych równaniach całkowych

W rezultacie otrzymuje się równanie całkowe w postaci:

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\
= \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\
+ \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie $w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \frac{r^2}{8\pi} \ln(r)$ jest rozwiązaniem podstawowym (funkcją Greena) równania

biharmonicznego $\nabla^4 w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \bar{\delta}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ i $\bar{\delta}$ jest deltą Diraca oraz

$c(\mathbf{x}) = 1$, kiedy \mathbf{x} jest położony wewnątrz obszaru płyty,

$c(\mathbf{x}) = 0.5$, kiedy \mathbf{x} jest położony na brzegu gładkim płyty,

$c(\mathbf{x}) = 0$, kiedy \mathbf{x} jest położony na zewnątrz obszaru płyty.

Drugie równanie (2.4) otrzymuje się zastępując jednostkową siłę skupioną $P^* = 1^*$ jednostkowym momentem skupionym $M_n^* = 1^*$. Jest to równoważne zróżniczkowaniu pierwszego równania całkowego (2.3) względem współrzędnej n w punkcie \mathbf{x} płyty. Równanie to ma postać:

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [\bar{T}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - \bar{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - \bar{M}_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\
= \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \bar{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \bar{\varphi}_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\
+ \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\left\{ T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{M}_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{\varphi}_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\} = \\
= \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left\{ T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\}
\end{aligned}$$

W pierwszych pochodnych funkcji podstawowych występujących w równaniach (2.2) i (2.4) rezygnuje się zwykle z członów związanych z obrotem płyty jako ciała sztywnego. Dyskretyzacji brzegu płyty dokonano stosując elementy typu „constans”. W celu wyeliminowania całek osobliwych, punkt źródłowy został nieznacznie odsunięty na zewnątrz obszaru płyty [19, 20] (wtedy współczynnik $c(\mathbf{x}) = 0$).

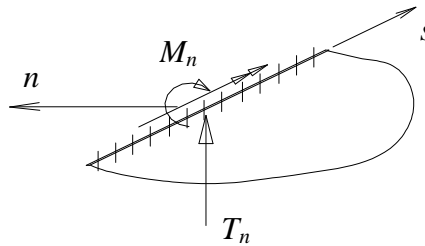
2.2. WARUNKI BRZEGOWE

W niniejszym podrozdziale zostaną przedstawione brzegowe równania całkowe odpowiadające trzem rodzajom warunków brzegowych.

2.2.1. Brzeg utwierdzony

Warunki brzegowe:

$$w_b = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad \varphi_s = 0, \quad M_{ns} = 0 \quad (2.5)$$



Rys. 2. Wielkości niewiadome na brzegu utwierdzonym

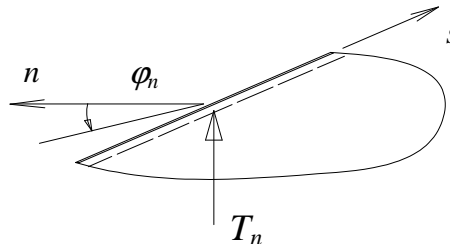
Niewiadomymi wielkościami są: siła poprzeczna T_n i moment zginający M_n (Rys.2). Brzegowe równania całkowe mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) &= 0 \\ \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \bar{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

2.2.2. Brzeg podparty swobodnie

Warunki brzegowe:

$$w_b = 0, \quad M_n = 0, \quad \varphi_s = 0, \quad M_{ns} = 0 \quad (2.7)$$



Rys. 3. Wielkości niewiadome na brzegu podpartym swobodnie

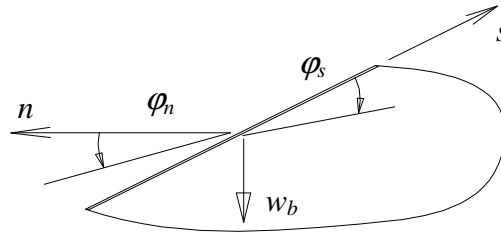
Niewiadomymi wielkościami są: siła poprzeczna T_n i kąt obrotu w kierunku normalnym do brzegu φ_n (Rys.3). Brzegowe równania całkowe mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[-M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} \left[T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \\ \int_{\Gamma} \left[-\overline{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} \left[T_n(\mathbf{y}) \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

2.2.3. Brzeg swobodny

Warunki brzegowe:

$$T_n = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{ns} = 0 \quad (2.9)$$



Rys. 4. Wielkości niewiadome na brzegu swobodnym

Niewiadomymi wielkościami są: kąty obrotu w kierunku normalnym φ_n i stycznym φ_s oraz ugięcie w_b (Rys.4). Ponieważ relacja pomiędzy φ_s i w_b jest znana, $\varphi_s = \frac{\partial w_b}{\partial s}$, rozważa się jedynie dwa niezależne parametry: w_b oraz φ_n . Brzegowe równania całkowe mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s}(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \\ \int_{\Gamma} \left[\overline{T}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - \overline{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - \overline{M}_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s}(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

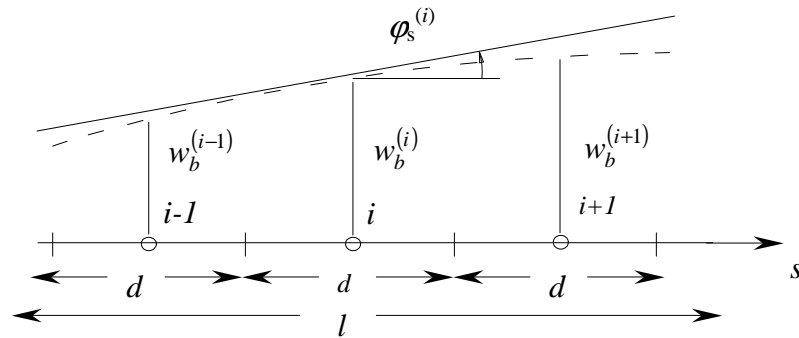
W obydwu równaniach, $\frac{\partial w_b}{\partial s}$ można obliczyć budując iloraz różnicowy przy użyciu trzech sąsiednich węzłów (Rys. 5):

$$\varphi_s^{(i)} = \frac{1}{2d} (w_b^{(i+1)} - w_b^{(i-1)}) \quad (2.11)$$

$$\varphi_s^{(i-1)} = \frac{1}{d} \left(-\frac{3}{2} w_b^{(i-1)} + 2w_b^{(i)} - \frac{1}{2} w_b^{(i+1)} \right) \quad (2.12)$$

$$\varphi_s^{(i+1)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{2} w_b^{(i-1)} - 2w_b^{(i)} + \frac{3}{2} w_b^{(i+1)} \right) \quad (2.13)$$

Wyrażenia (2.12) i (2.13) stosuje się dla węzłów położonych na początku i na końcu krawędzi swobodnej.



Rys. 5. Kąt obrotu styczny do elementu na brzegu swobodnym

Funkcje podstawowe podane są w układzie współrzędnych O_i, n_i, s_i , związanym z elementem brzegowym i odnoszą się bezpośrednio do równań (2.6), (2.8) i (2.10). Wzory funkcji zamieszczono w załączniku **Z.1.1.** i **Z.1.2.**

2.3. BUDOWA UKŁADU RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Po dyskretyzacji brzegu płyty na elementy, należy zbudować układ równań, w którym niewiadomymi będą odpowiednie wielkości brzegowe:

$$\mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{F} \quad (2.14a)$$

Jeżeli płyta ma brzeg swobodny, to równanie (2.14a) można zapisać następująco:

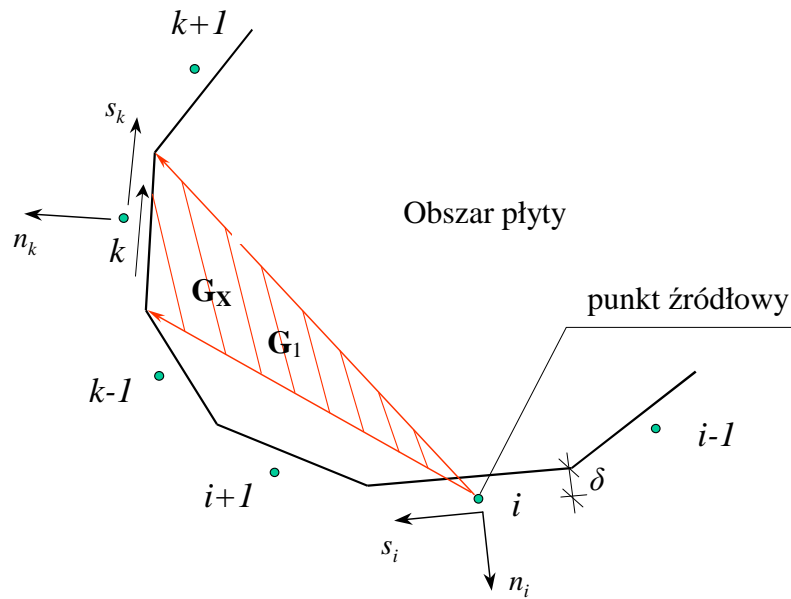
$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{\Lambda} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \varphi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.14b)$$

gdzie \mathbf{G} jest macierzą całek brzegowych, \mathbf{X} jest wektorem niewiadomych brzegowych i \mathbf{F} jest wektorem obciążenia. Taka postać równania (2.14b) wynika z uwzględnienia równań różnicowych (2.11), (2.12) i (2.13). Wtedy kąty obrotu φ_s są dodatkowymi niewiadomymi zadania.

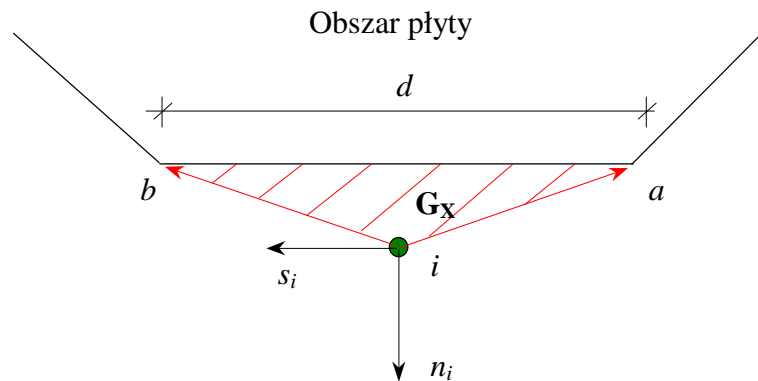
2.3.1. Obliczanie całek macierzy charakterystycznej

Budując macierz charakterystyczną należy wykonać całkowania z danego elementu po brzegu płyty (po kolejnych elementach brzegowych). Całkowanie wykonuje się w układzie współrzędnych O_i, n_i, s_i związanym z i -tym elementem, a następnie dokonuje się transformacji tak obliczonych wielkości do układu O_k, n_k, s_k związanego z (k -tym) elementem (Rys. 6a). Całki będące elementami

quasi-diagonalnymi macierzy charakterystycznej oblicza się analitycznie (Rys. 6b). Pozostałe całki oblicza się numerycznie stosując metodę Gaussa (Rys. 6c).



Rys. 6a. Oznaczenia stosowane przy obliczaniu całek macierzy charakterystycznej



Rys. 6b. Oznaczenia stosowane przy obliczaniu analitycznym całek macierzy charakterystycznej

Całki quasi diagonalne są wyrażone wzorami:

$$\int_{-d/2}^{d/2} w_i^* \cdot ds_i = \frac{1}{576 \cdot \pi \cdot D} \left[-72\delta^2 d \cdot \ln(2) + 36\delta^2 d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) - 48\delta^2 d + \right. \\ \left. + 96\delta^3 \arctg\left(\frac{1}{2} \frac{d}{\delta}\right) - 6d^3 \cdot \ln(2) + 3d^3 \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) - 2d^3 \right] \quad (2.15)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \varphi_{n_i}^* \cdot ds_i = -\frac{1}{8\pi D} \delta \left[-2d \cdot \ln(2) + d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) - d + 4\delta \cdot \arctg\left(\frac{d}{2\delta}\right) \right] \quad (2.16)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \varphi_{s_i}^* \cdot ds_i = 0 \quad (2.17)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} M_{n_i}^* \cdot ds_i = -\frac{1}{8\pi} \left[-2d \cdot \ln(2) + d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) - d + 8\delta \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right) + \right. \\ \left. - 2v_p d \cdot \ln(2) + v_p d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) + v_p d \right] \quad (2.18)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} M_{s_i}^* \cdot ds_i = -\frac{1}{8\pi} \left[-2d \cdot \ln(2) + d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) + d + 8\delta \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right) + \right. \\ \left. - 2v_p d \cdot \ln(2) + v_p d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) - v_p d \right] \quad (2.19)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} M_{n_i s_i}^* \cdot ds_i = 0 \quad (2.20)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} T_{n_i}^* \cdot ds_i = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right) \quad (2.21)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} T_{s_i}^* \cdot ds_i = 0 \quad (2.22)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \overline{w}_i^* \cdot ds_i = -\frac{1}{8\pi D} \left[-2d \cdot \ln(2) + d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) - 2d + 4\delta \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right) \right] \quad (2.23)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \overline{\varphi}_{n_i}^* \cdot ds_i = -\frac{1}{8\pi D} \left[-2d \cdot \ln(2) + d \cdot \ln(4\delta^2 + d^2) - 2d + 8\delta \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right) \right] \quad (2.24)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \overline{\varphi}_{s_i}^* \cdot ds_i = 0 \quad (2.25)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \overline{M}_{n_i}^* \cdot ds_i = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{v_p \delta \cdot d - \delta \cdot d + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right)\delta^2 + \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right)d^2}{4\delta^2 + d^2} \quad (2.26)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \overline{M}_{s_i}^* \cdot ds_i = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\delta \cdot d - v_p \delta \cdot d + 4v_p \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right)\delta^2 + v_p \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\delta}\right)d^2}{4\delta^2 + d^2} \quad (2.27)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \overline{M}_{n_i s_i}^* \cdot ds_i = 0 \quad (2.28)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \bar{T}_{n_i} \cdot ds_i = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{4\delta^2 + d^2} \quad (2.29)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \bar{T}_{s_i} \cdot ds_i = 0. \quad (2.30)$$

Powyższe całki obliczono za pomocą programu Maple.

Całki brzegowe funkcji podstawowych nie będące elementami quasi-diagonalnymi oblicza się metodą Gaussa:

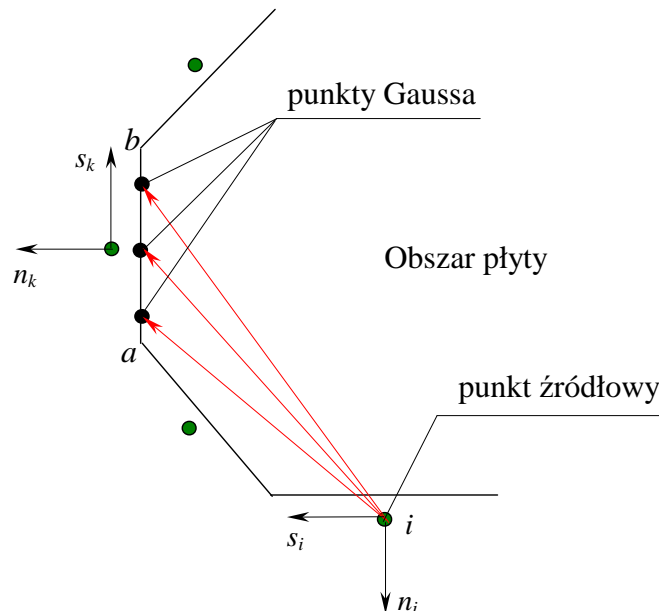
$$I = \int_a^b f(s) \cdot ds = \frac{d}{2} \cdot \int_{-1}^1 f(\eta) \cdot d\eta = \frac{d}{2} \cdot \sum_{j=1}^m W_j \cdot f(\eta_j) \quad j = 1, 2, 3 \dots m \quad (2.31)$$

gdzie m jest liczbą punktów Gaussa, W_j jest wagą j -tego punktu, a η_j odcięta j -tego punktu.

Funkcje podstawowe są wyrażone we współrzędnych O_i , n_i , s_i . Dlatego wszystkie współrzędne punktów Gaussa przeliczane są do tych współrzędnych:

$$n_i^{(j)} = n_i^{(a)} + (n_i^{(b)} - n_i^{(a)}) \cdot \bar{\eta}_j, \quad s_i^{(j)} = s_i^{(a)} + (s_i^{(b)} - s_i^{(a)}) \cdot \bar{\eta}_j,$$

gdzie $n_i^{(a)}$, $s_i^{(a)}$, $n_i^{(b)}$, $s_i^{(b)}$ są współrzędnymi początku i końca elementu w układzie O_i , n_i , s_i .



Rys. 6c. Obliczanie całek brzegowych macierzy charakterystycznej metodą Gaussa

Całki oblicza się w układzie współrzędnych O_i , n_i , s_i związanym z i -tym elementem brzegowym.

Następnie należy dokonać transformacji tak obliczonych całek do układu O_k , n_k , s_k :

$$\varphi_{n_k}^* = \varphi_{n_i}^* \cdot c_{nm} + \varphi_{s_i}^* \cdot c_{ns} \quad (2.32)$$

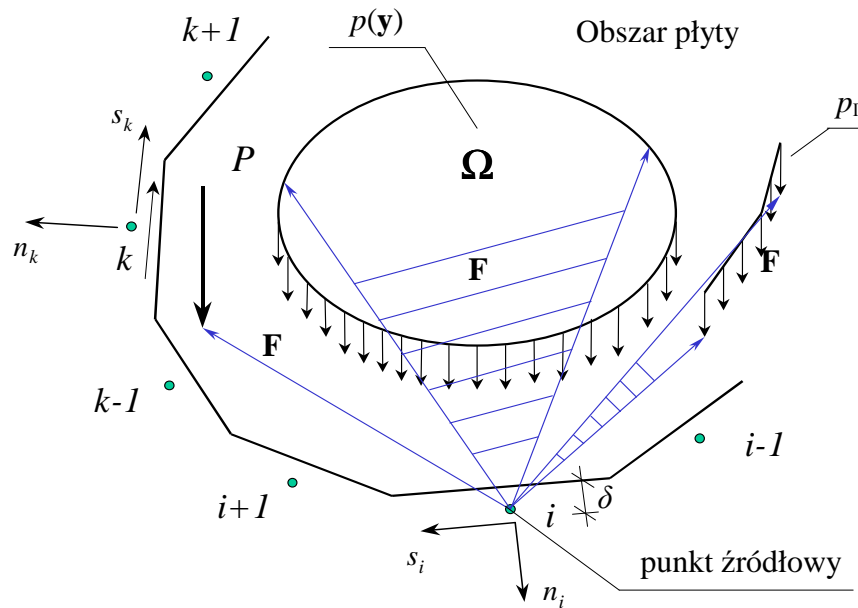
$$M_{n_k}^* = M_{n_i}^* \cdot c_{nm}^2 + M_{s_i}^* \cdot c_{ns}^2 + 2 \cdot M_{n_i s_i}^* \cdot c_{nm} \cdot c_{ns} \quad (2.33)$$

$$M_{n_k s_k}^* = (M_{s_i}^* - M_{n_i}^*) \cdot c_{nm} \cdot c_{ns} + M_{n_i s_i}^* \cdot [c_{nm}^2 - c_{ns}^2] \quad (2.34)$$

$$T_{n_k}^* = T_{n_i}^* \cdot c_{nm} + T_{s_i}^* \cdot c_{ns} \quad (2.35)$$

2.3.2. Obliczanie całek wektora prawej strony

Budując wektor prawej strony zwany inaczej wektorem obciążenia (Rys. 7), należy dokonać całkowania odpowiednich funkcji podstawowych po obszarze obciążenia [1]. Jeśli obciążenie rozłożone jest liniowo, należy wykonać całkowanie po odpowiedniej krzywej wzdłuż której działa. W przypadku, gdy obciążenie występuje w postaci siły skupionej, należy obliczyć wartość odpowiedniej funkcji podstawowej w punkcie przyłożenia tej siły.



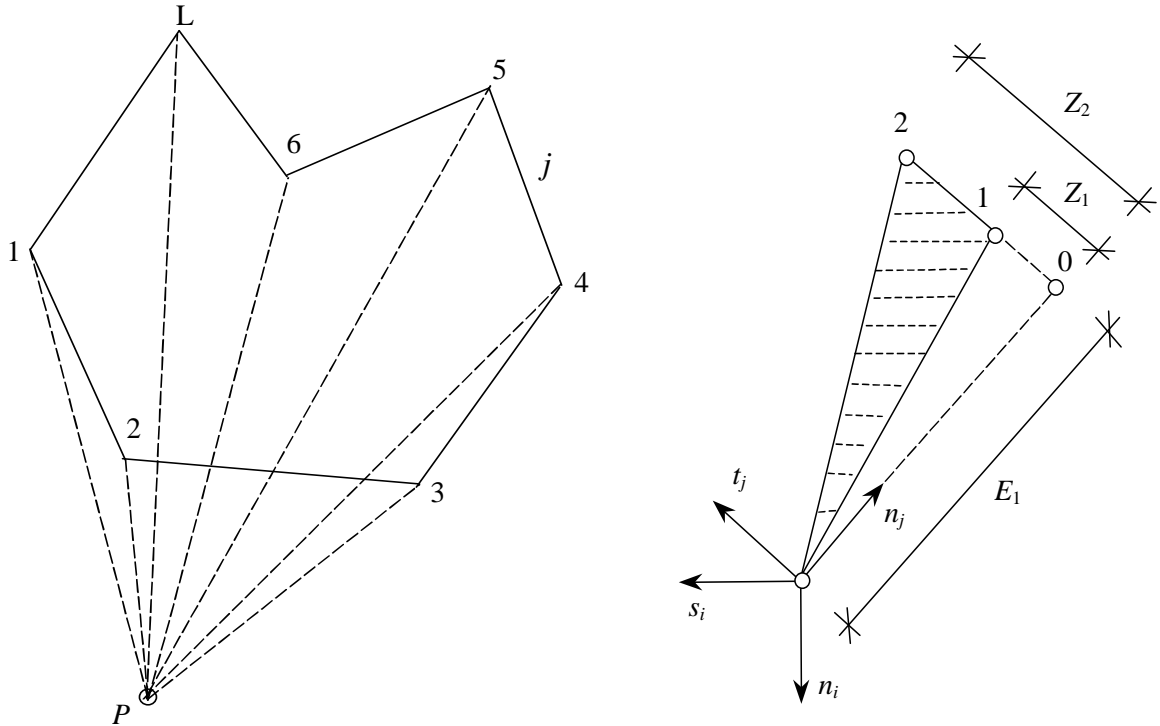
Rys. 7. Oznaczenia stosowane przy obliczaniu całek wektora prawej strony

2.3.2.1. Obliczanie całek wektora prawej strony dla obciążenia rozłożonego na powierzchni płyty

Obciążenie ciągłe zostało przedstawione w formie wielokąta (Rys. 8a i 8b). W wielokącie tym przyjęto stały charakter obciążenia $p = \text{const}$. Odpowiednie całki przyporządkowane wektorowi wyrazów wolnych mają postać: $p \int_{\Omega} w^* d\Omega$ oraz $p \int_{\Omega} \bar{w}^* d\Omega$. Całki powierzchniowe obliczone

zostały na drodze analitycznej, z wykorzystaniem sposobu całkowania zaproponowanego w pracy [1]. Całkę po powierzchni wieloboku można przedstawić następująco:

$$I_{1,2,3...L} = I_{P12} + I_{P23} + I_{P34} + \dots + I_{PL1} \quad (2.36)$$



Rys. 8a i 8b. Obliczanie całek wektora prawej strony od obciążenia $p = \text{const.}$ rozłożonego na powierzchni płyty [1]

Wzory całkowe wyprowadzono dla elementów wielokąta, których numeracja węzłów wzrasta lewoskrętnie.

Całkowanie funkcji fundamentalnej w^* po brzegu obciążenia:

$$p \int_{\Omega} w^* d\Omega = \frac{p}{8\pi D} \int_0^{\frac{Z_2 n_j}{E_1 E_2}} \int_{\frac{Z_1 n_j}{E_1}}^{\frac{Z_2 n_j}{E_1 E_2}} (n_j^2 + t_j^2) \cdot \ln(\sqrt{n_j^2 + t_j^2}) \cdot dt_j \cdot dn_j \quad (2.37a)$$

$$p \int_{\Omega} w^* d\Omega = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot \frac{E_1}{144} \cdot \left[12 \cdot Z_2 \cdot (Z_2^2 + 3 \cdot E_1^2) \cdot \ln(R_2) - 12 \cdot Z_1 \cdot (Z_1^2 + 3 \cdot E_1^2) \cdot \ln(R_1) + \right. \\ \left. - 7 \cdot Z_2^3 + 7 \cdot Z_1^3 - 33 \cdot Z_2 \cdot E_1^2 + 33 \cdot Z_1 \cdot E_1^2 + 24 \cdot E_1^3 \cdot \Psi_2 - 24 \cdot E_1^3 \cdot \Psi_1 \right] \quad (2.37b)$$

Całkowanie funkcji fundamentalnej \bar{w}^* po brzegu obciążenia:

$$p \int_{\Omega} \bar{w}^* d\Omega = \frac{p}{8\pi D} \int_0^{\frac{Z_2 n_j}{E_1}} \int_{\frac{Z_1 n_j}{E_1}}^{\frac{Z_2 n_j}{E_2}} n_j \cdot \ln\left(\sqrt{n_j^2 + t_j^2}\right) \cdot dt_j \cdot dn_j \quad (2.38a)$$

$$p \int_{\Omega} \bar{w}^* d\Omega = \frac{p}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[\bar{I}w_1 \cdot \cos(n_j, n_i) + \bar{I}w_2 \cdot \cos(t_j, n_i) \right] \quad (2.38b)$$

$$\bar{I}w_1 = \int_0^{\frac{Z_2 n_j}{E_1}} \int_{\frac{Z_1 n_j}{E_1}}^{\frac{Z_2 n_j}{E_2}} n_j \cdot \ln\left(\sqrt{n_j^2 + t_j^2}\right) \cdot dt_j \cdot dn_j \quad (2.39a)$$

$$\bar{I}w_1 = -\frac{E_1^2}{18} \cdot \left[8 \cdot Z_2 - 8 \cdot Z_1 - 6 \cdot Z_2 \cdot \ln(R_2) + 6 \cdot Z_1 \cdot \ln(R_1) - 6 \cdot \Psi_2 \cdot E_1 + 6 \cdot \Psi_1 \cdot E_1 \right] \quad (2.39b)$$

$$\bar{I}w_2 = \int_0^{\frac{Z_2 n_j}{E_1}} \int_{\frac{Z_1 n_j}{E_1}}^{\frac{Z_2 n_j}{E_2}} t_j \cdot \ln\left(\sqrt{n_j^2 + t_j^2}\right) \cdot dt_j \cdot dn_j \quad (2.40a)$$

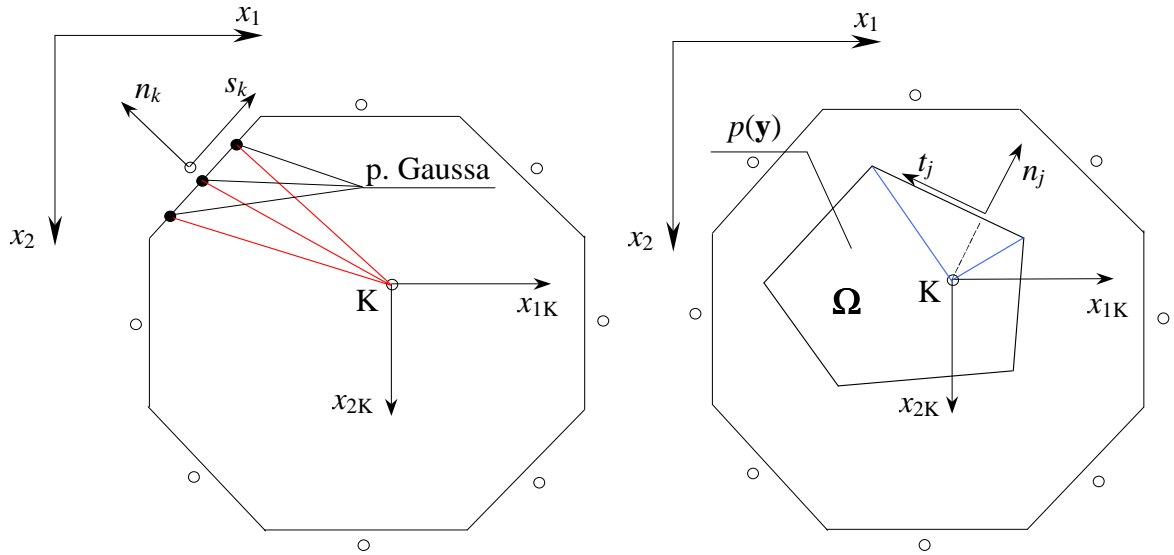
$$\bar{I}w_2 = -\frac{E_1}{36} \cdot \left[6 \cdot \ln(R_1) \cdot R_1^2 - 6 \cdot \ln(R_2) \cdot R_2^2 + 5 \cdot Z_2^2 - 5 \cdot Z_1^2 \right] \quad (2.40b)$$

Przyjęto oznaczenia:

$$R_1^2 = Z_1^2 + E_1^2, \quad R_2^2 = Z_2^2 + E_1^2, \quad \Psi_1 = \arctan\left(\frac{Z_1}{E_1}\right), \quad \Psi_2 = \arctan\left(\frac{Z_2}{E_2}\right) \quad j = 1, 2, 3 \dots L$$

2.4. OBLICZANIE UGIĘCIA PŁYTY

Rozwiązanie układu równań pozwoliło określić odpowiednie wielkości brzegowe. Można wówczas, bazując na tym samym całkowym równaniu brzegowym (2.3) obliczyć ugięcie w dowolnym punkcie obszaru płyty (punkt kolokacji znajduje się teraz wewnątrz obszaru płyty), współczynnik $c(\mathbf{x}) = 1$. Do obliczania wartości ugięcia wykorzystuje się wyprowadzone wcześniej odpowiednie całki brzegowe, całki po powierzchni obciążenia Ω oraz całki po krzywej dla obciążenia rozłożonego liniowo.



Rys. 9a i 9b. Oznaczenia stosowane przy obliczaniu ugięcia w punkcie K od wielkości brzegowych i obciążenia

Ugięcie płyty można przedstawić jako sumę ugięcia od wielkości brzegowych (Rys. 9a) i obciążenia (Rys.9b):

$$w = w(\bar{\mathbf{X}}) + w(p) \quad (2.41a)$$

Bezpośrednio, stosując równanie pracy wirtualnej (2.3) można zapisać:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) = & - \int_{\Gamma} [T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.41b)$$

a po dyskretyzacji na elementy brzegowe:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) = & - \sum_{k=1}^{le} w_b^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} T_n^* d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{le} \varphi_n^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} M_n^* d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{le} \varphi_s^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} M_{ns}^* d\Gamma_k + \\ & + \sum_{k=1}^{le} T_n^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} w^* d\Gamma_k - \sum_{k=1}^{le} M_n^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} \varphi_n^* d\Gamma_k + \sum_{l=1}^{Lp} p \cdot \int_{\Omega_l} w^* d\Omega \end{aligned} \quad (2.41c)$$

gdzie le jest liczbę elementów brzegowych i Lp jest liczbą obciążeń ciągłych rozłożonych na powierzchni płyty. Całkowanie odpowiednich funkcji brzegowych odbywa się w przesuniętym, globalnym układzie współrzędnych O_K, x_{1K}, x_{2K} . Tak obliczone całki brzegowe transformuje się do lokalnego układu współrzędnych O_k, n_k, s_k , związanego z k -tym elementem.

2.5. OBLICZANIE KĄTÓW OBROTU W PŁYCCIE

Do obliczenia kąta obrotu należy wykorzystać wyprowadzone wcześniej całkowe równanie brzegowe (2.3). Równanie to należy zróżniczkować jednokrotnie po współrzędnej x_i . Punkt kolokacji jest położony wewnątrz obszaru płyty, więc współczynnik $c(\mathbf{x}) = 1$. W każdym punkcie płyty oblicza się dwie wartości kąta obrotu względem układu współrzędnych O, x_{1K}, x_{2K} .

Do obliczeń można wykorzystać wyprowadzone wcześniej odpowiednie całki brzegowe, całki po powierzchni obciążenia Ω oraz całki po krzywej dla obciążenia rozłożonego liniowo. Kąt obrotu można przedstawić jako sumę (Rys.9a i 9b):

$$\varphi_{x_i} = \varphi_{x_i}(\bar{\mathbf{X}}) + \varphi_{x_i}(p) \quad i = 1, 2 \quad (2.42a)$$

Stosując równanie pracy wirtualnej można zapisać:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_i}(\mathbf{x}) = & - \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial T_n^*}{\partial x_i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w_b(\mathbf{y}) - \frac{\partial M_n^*}{\partial x_i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \int_{\Gamma} \left[T_n(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial x_i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \varphi_s^*}{\partial x_i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \quad (2.42b) \\ & + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

a po dyskretyzacji elementami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_i}(x_1, x_2) = & - \sum_{k=1}^{le} w_b^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} \frac{\partial T_n^*}{\partial x_i} d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{le} \varphi_n^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} \frac{\partial M_n^*}{\partial x_i} d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{le} \varphi_s^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i} d\Gamma_k + \\ & + \sum_{k=1}^{le} T_n^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} \frac{\partial w^*}{\partial x_i} d\Gamma_k - \sum_{k=1}^{le} M_n^{(k)} \cdot \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial x_i} d\Gamma_k + \sum_{l=1}^{Lp} p \cdot \int_{\Omega_l} \frac{\partial w^*}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (2.42c)$$

gdzie le jest liczbą elementów brzegowych i Lp jest liczbą obciążeń ciągłych rozłożonych na powierzchni płyty. Analogicznie jak w podrozdziale 2.4., całkowanie odpowiednich funkcji brzegowych odbywa się w globalnym układzie współrzędnych O_K, x_{1K}, x_{2K} . Tak obliczone całki brzegowe transformuje się do lokalnego układu współrzędnych O_k, n_k, s_k , związanego z k -tym elementem. Wzory na pierwsze pochodne funkcji podstawowych w układzie współrzędnych O, x_1, x_2 zamieszczono w załączniku Z.3.

Do obliczeń odpowiednich całek brzegowych można wykorzystać równania (2.41a), (2.41b) i (2.41c) podstawiając w miejsce funkcji podstawowych pierwsze pochodne tych funkcji po

współrzędnej x_1 lub x_2 . Całki po powierzchni obciążenia można obliczyć analogicznie do sposobu przedstawionego w podrozdziale 2.3.2.1., z tym, że należy uwzględnić we wzorach (2.38a) i (2.38b) człon związany z obrotem płyty jako bryły sztywnej.

Mając obliczone kąty obrotu płyty w kierunku φ_x i kierunku φ_y , można znaleźć kąt obrotu płyty w dowolnym kierunku.

2.6. OBLICZANIE MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH I MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO W PŁYTCIE

W teorii płyt cienkich, momenty zginające są opisane wzorami:

$$M_{x_1}(x_1, x_2) = -D \left(\frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \nu_p \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.43)$$

$$M_{x_2}(x_1, x_2) = -D \left(\frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \nu_p \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \right) \quad (2.44)$$

a moment skręcający:

$$M_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = -D(1 - \nu_p) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.45)$$

gdzie $w(x_1, x_2)$ jest funkcją ugięcia płyty w punkcie o współrzędnych x_1, x_2 .

W równaniach (2.43), (2.44) i (2.45) występują drugie pochodne ugięcia $w(x_1, x_2)$. Wiąże się to z dwukrotnym zróżniczkowaniem odpowiednich funkcji podstawowych występujących w całkowym równaniu brzegowym (2.3):

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \{T_n^*(x_1, x_2), M_n^*(x_1, x_2), M_{ns}^*(x_1, x_2), w^*(x_1, x_2), \varphi_n^*(x_1, x_2), \varphi_s^*(x_1, x_2)\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \{T_n^*(x_1, x_2), M_n^*(x_1, x_2), M_{ns}^*(x_1, x_2), w^*(x_1, x_2), \varphi_n^*(x_1, x_2), \varphi_s^*(x_1, x_2)\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \{T_n^*(x_1, x_2), M_n^*(x_1, x_2), M_{ns}^*(x_1, x_2), w^*(x_1, x_2), \varphi_n^*(x_1, x_2), \varphi_s^*(x_1, x_2)\}.$$

Wzory na drugie pochodne funkcji podstawowych w układzie współrzędnych O, x_1, x_2 zamieszczono w załączniku Z.4.

Moment zginający można podzielić na człon związany z wielkościami brzegowymi oraz na człon związany z obciążeniem:

$$M_{x_i} = M_{x_i}(\bar{\mathbf{X}}) + M_{x_i}(p) \quad i = 1, 2 \quad (2.46)$$

Moment skręcający można wyrazić podobną zależnością:

$$M_{x_1x_2} = M_{x_1x_2}(\bar{\mathbf{X}}) + M_{x_1x_2}(p) \quad (2.47)$$

Człon wzorów (2.46) i (2.47) związany z wielkościami brzegowymi można obliczyć stosując metodę całkowania numerycznego Gaussa. Do obliczeń zastosowano kwadraturę dwunastopunktową. Odpowiednie całki brzegowe oblicza się w układzie współrzędnych O_K, x_{1K}, x_{2K} (Rys. 9a). Tak obliczone całki transformuje się do lokalnego układu współrzędnych O_k, n_k, s_k , związanego z k -tym elementem, podobnie jak miało to miejsce podczas budowy macierzy charakterystycznej. Do obliczeń odpowiednich całek brzegowych można wykorzystać równania (2.41a), (2.41b) i (2.41c) podstawiając w miejsce funkcji podstawowych drugie pochodne tych funkcji po współrzędnej x_1 lub x_2 .

W następnej kolejności należy obliczyć człon wzorów (2.46) i (2.47) związany z obciążeniem (Rys. 9b). W przypadku obciążenia rozłożonego w sposób ciągły na powierzchni płyty, oblicza się całki powierzchniowe z iloczynu obciążenia i drugiej pochodnej funkcji podstawowej ugięcia:

$$p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 x_1} d\Omega, \quad p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 x_2} d\Omega \quad \text{oraz} \quad p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} d\Omega. \quad \text{Całki obliczono sposobem zaproponowanym}$$

w pracy [1]. Otrzymuje się wówczas:

$$p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_j^2} d\Omega = \frac{p}{8\pi D} \int_0^{\frac{Z_2 n_j}{E_1}} \int_0^{\frac{E_1 E_1 n_j}{E_1}} \left[2 \cdot \ln\left(\sqrt{n_j^2 + t_j^2}\right) + 2 \frac{n_j^2}{n_j^2 + t_j^2} + 1 \right] \cdot dt_j \cdot dn_j \quad (2.48a)$$

$$p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t_j^2} d\Omega = \frac{p \cdot E_1}{8\pi D} \left[2\Psi_2 E_1 - 2\Psi_1 E_1 + \frac{3}{2} Z_1 - \frac{3}{2} Z_2 + Z_2 \cdot \ln(R_2) - Z_1 \cdot \ln(R_1) \right] \quad (2.48b)$$

$$p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t_j^2} d\Omega = \frac{p}{8\pi D} \int_0^{\frac{Z_2 n_j}{E_1}} \int_0^{\frac{E_1 E_1 n_j}{E_1}} \left[2 \cdot \ln\left(\sqrt{n_j^2 + t_j^2}\right) + 2 \frac{t_j^2}{n_j^2 + t_j^2} + 1 \right] \cdot dt_j \cdot dn_j \quad (2.49a)$$

$$p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t_j^2} d\Omega = \frac{p \cdot E_1}{8\pi D} \left[Z_2 \cdot \ln(R_2) - Z_1 \cdot \ln(R_1) - \frac{1}{2} Z_2 + \frac{1}{2} Z_1 \right] \quad (2.49b)$$

$$p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_j \partial t_j} d\Omega = \frac{p}{8\pi D} \int_0^{E_1} \int_{\frac{Z_1}{E_1} n_j}^{\frac{Z_2}{E_1} n_j} \left(\frac{2 \cdot t_j \cdot n_j}{n_j^2 + t_j^2} + 1 \right) \cdot dt_j \cdot dn_j \quad (2.50a)$$

$$p \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_j \partial t_j} d\Omega = \frac{p \cdot E_1}{16\pi D} [2E_1 \cdot \ln(R_2) - 2E_1 \cdot \ln(R_1)] \quad (2.50b)$$

gdzie: $R_1 = \sqrt{Z_1^2 + E_1^2}$, $R_2 = \sqrt{Z_2^2 + E_1^2}$, $\Psi_1 = \arctan\left(\frac{Z_1}{E_1}\right)$, $\Psi_2 = \arctan\left(\frac{Z_2}{E_2}\right)$, $j = 1, 2, 3 \dots L$

Pochodne drugiego rzędu obliczono w układzie współrzędnych lokalnych O, n_j, t_j , związanych z j -tym odcinkiem prostoliniowym brzegu obciążenia (Rys. 8a i 8b). Należy zatem dokonać transformacji tak obliczonych wielkości do globalnego układu współrzędnych O, x_1, x_2 .

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2^2 & c_1^2 & 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & -2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ -c_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot c_2 & c_2^2 - c_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t_j^2} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_j^2} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial t_j \partial n_j} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

gdzie: $c_1 = \cos(n_j, x_1)$ i $c_2 = \cos(n_j, x_2)$.

Po obliczeniu momentów zginających M_{x_1} , M_{x_2} i momentu skręcającego $M_{x_1 x_2}$, dokonując odpowiedniej transformacji, można obliczyć momenty zginające i moment skręcający względem dwóch dowolnych osi obróconego układu współrzędnych.

2.7. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

Obliczenia przeprowadza się dla płyt o różnym kształcie i różnych warunkach brzegowych. Brzeg płyty podzielony jest na elementy typu „constans” o równej długości. Całki quasi-diagonalne macierzy charakterystycznej oblicza się analitycznie, a pozostałe numerycznie, wykorzystując dwunastopunktową kwadraturę Gaussa.

W celu uproszczenia oznaczeń przyjęto, że oś x_1 odpowiada osi x , a oś x_2 odpowiada osi y globalnego układu współrzędnych.

W podrozdziałach 2.7.1. - 2.7.5. rozważane jest klasyczne zadanie statyki płyty prostokątnej o różnych warunkach brzegowych. Wyniki obliczeń przedstawione są w wielkościach bezwymiarowych i porównane są z rozwiązaniami analitycznymi, znanymi z klasycznej teorii płyt [58]. Przeprowadza się również analizę wpływu bezwymiarowego parametru odsunięcia punktu kolokacji ε od brzegu płyty na rozwiązanie (ugięcie i momenty zginające).

W podrozdziale 2.7.6. rozważane jest zadanie płyty mostowej skośnej, podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach i obciążonej równomiernie. Wyniki obliczeń porównane są z rozwiązaniami empirycznymi [49] i numerycznymi uzyskanymi metodą elementów skończonych.

W podrozdziale 2.7.7. rozważane jest zadanie płyty kołowej utwierdzonej na obwodzie i obciążonej siłą skupioną w środku. Wyniki obliczeń porównane są z rozwiązaniem analitycznym przedstawionym w pracy [58].