

4.1. MODELE Dyskretne Podłoża Sprężystego Typów: Winklera i Półprzestrzeni Sprężystej

Metoda elementów brzegowych jest również wykorzystywana w rozwiązywaniu zadania płyty spoczywającej na podłożu sprężystym. Rozważa się dyskretny model podłoża typów: Winklera lub półprzestrzeni sprężystej. Równanie deformacji podłoża można opisać następująco (Rys. 38a):

$$w_s(\mathbf{P}) = \int_{\Omega} q_0(\mathbf{Q}) \cdot g_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \cdot d\Omega_{\mathbf{Q}} \quad (4.1)$$

gdzie q_0 jest odporem gruntu, Ω jest obszarem na którym działa obciążenie i $g_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ jest funkcją podatności podłoża. Dla podłoża typu Winklera przyjmuje się:

$$g_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = k \cdot \bar{\delta}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \quad (4.2)$$

gdzie $\bar{\delta}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ jest deltą Diraca, a k jest sztywnością podłoża.

Dla podłoża typu półprzestrzeni sprężystej, funkcja podatności ma postać:

$$g_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \cdot \frac{1}{r} = C_1 \frac{1}{r} \quad (4.3)$$

gdzie E_0 jest modułem sprężystości podłoża i ν_0 jest współczynnikiem Poissona podłoża.

Po dyskretyzacji, podłoże typu Winklera można opisać budując diagonalną macierz podatności o współczynnikach na głównej przekątnej równych $\frac{1}{k} \cdot a_x a_y$ (Rys. 38a). Dla podłoża typu półprzestrzeni sprężystej funkcja deformacji przyjmie postać (Rys. 38b):

$$w_n = C_1 \cdot \sum_{m=1}^n q_{0m} \cdot \int_{S_m} \frac{1}{r_{n,Q}} \cdot dS_Q \quad (4.4a)$$

W notacji macierzowej można zapisać:

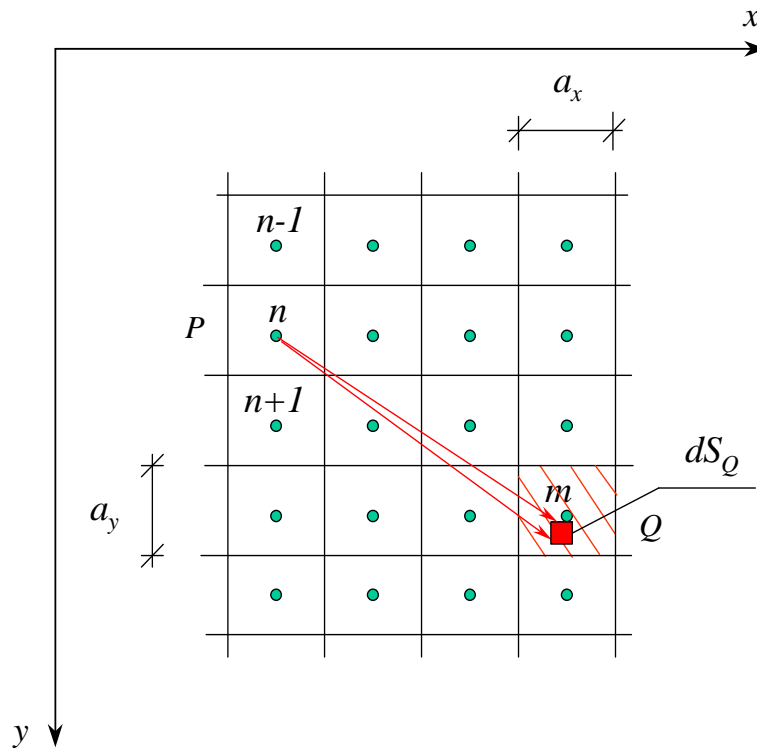
$$\mathbf{w} = C_1 \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}_0 \quad (4.4b)$$

gdzie $C_1 \mathbf{D}$ jest macierzą podatności podłoża. Dla podłoża typu półprzestrzeni sprężystej macierz \mathbf{D} jest pełna.

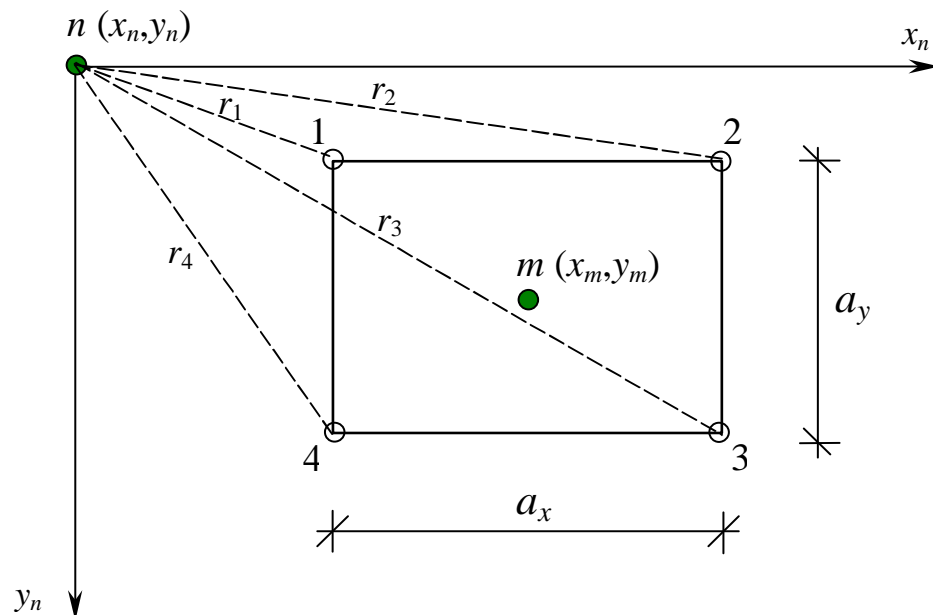
Z równania (4.4b) oblicza się odpór podłoża, który należy uwzględnić w równaniach pracy wirtualnej (4.6) i (4.7):

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{w} \quad (4.5)$$

gdzie $\mathbf{K} = \frac{1}{C_1} \mathbf{D}^{-1}$.



Rys. 38a. Budowa macierzy podatności podłoża

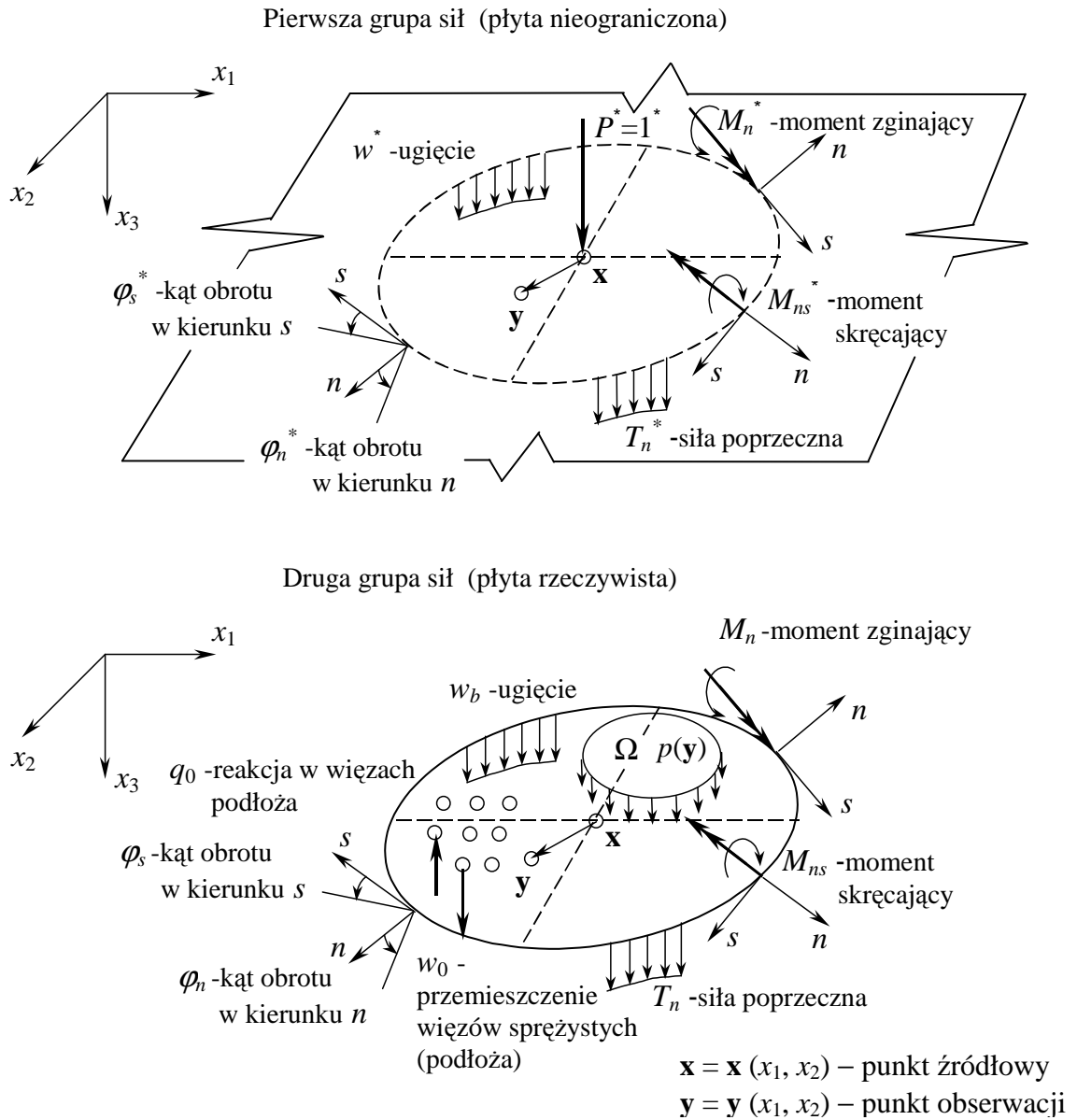


Rys. 38b. Obliczanie elementów macierzy \mathbf{D} dla podłoża typu półprzestrzeni sprężystej

Odpowiednie całki z funkcji opisanej równaniem (4.3) oblicza się analitycznie. Zamieszczono je w załączniku Z.5.

4.2. CAŁKOWE SFORMUŁOWANIE ZADANIA STATYKI PŁYTY SPOCZYWAJĄCEJ NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

Zadanie formułuje się podobnie do opisanego w podrozdziałach 2.1. i 3.1., (Rys. 39).



Rys. 39. Wielkości występujące w brzegowych równaniach całkowych

Brzegowe równania całkowe będą miały postać:

$$\begin{aligned}
 & c(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\
 & = \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \quad (4.6) \\
 & + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) - \int_{\Omega_0} q_0(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega_{q_0}(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 & c(\mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \left[\overline{T}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{y}) - \overline{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - \overline{M}_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[T_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \overline{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \overline{\varphi}_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\
 & + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) - \int_{\Omega_0} q_0(\mathbf{y}) \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega_0(\mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

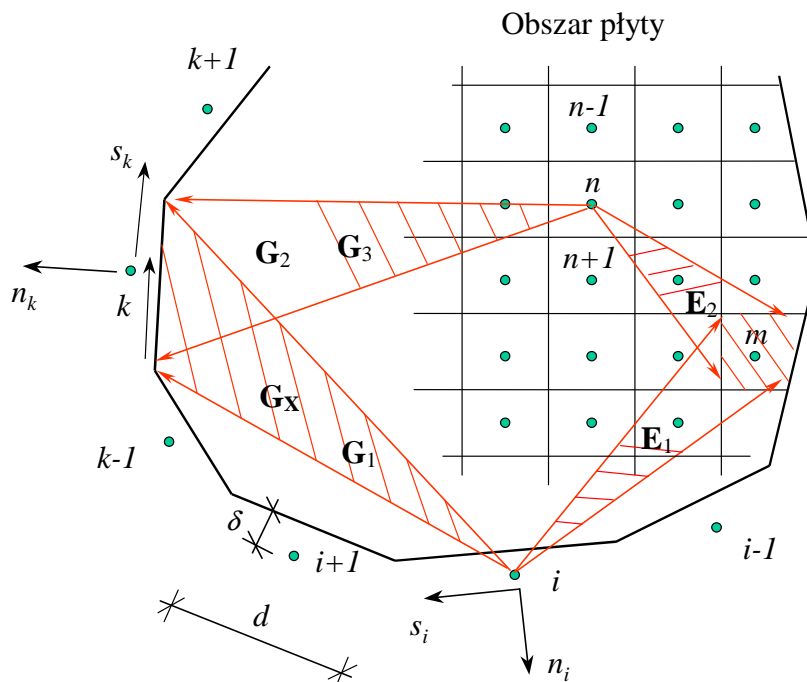
gdzie:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \overline{T}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \overline{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \overline{M}_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \overline{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \overline{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \overline{\varphi}_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left\{ T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\}
 \end{aligned}$$

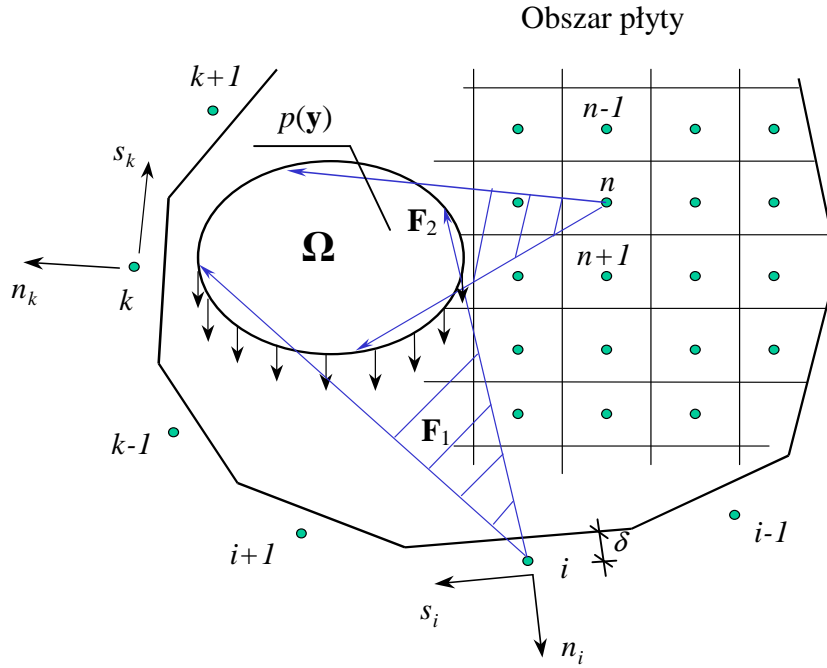
4.3. BUDOWA UKŁADU RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Dodatkowymi niewiadomymi w zadaniu są przemieszczenia wewnętrznych punktów kolokacji w_s . Po dyskretyzacji brzegu płyty na elementy brzegowe typu „constans” i wnętrza płyty na elementy powierzchniowe typu „constans” układ równań przybierze formę (Rys. 40 i Rys. 41):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_X & \mathbf{G}_1 & \mathbf{E}_1 \\ \Delta & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \varphi_s \\ \mathbf{w}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$



Rys. 40. Oznaczenia stosowane przy budowa macierzy charakterystycznej



Rys. 41. Oznaczenia stosowane przy budowa wektora prawej strony

4.4. OBLICZANIE UGIĘCIA PŁYTY SPOCZYWAJĄCEJ NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

Po rozwiązaniu układu znane są odpowiednie wielkości brzegowe oraz wielkości przemieszczeń wewnętrznych punktów kolokacji. Mając za podstawę to samo całkowe równanie brzegowe (4.6) można obliczyć ugięcie w dowolnym punkcie obszaru płyty (punkt kolokacji znajduje się wewnątrz obszaru płyty, współczynnik $c(\mathbf{x})=1$), podobnie jak to miało miejsce w podrozdziałach 1.4. i 2.2. Do obliczania wartości ugięcia wykorzystuje się wyprowadzone wcześniej odpowiednie całki brzegowe, całki po powierzchni obciążenia Ω oraz całki po krzywej dla obciążenia rozłożonego liniowo. Wzór opisujący ugięcie ulegnie nieznacznej modyfikacji o człon związany z przemieszczeniami i reakcjami w węzłach wewnętrznych punktów kolokacji:

$$w = w(\bar{\mathbf{X}}) + w(\mathbf{w}_0) + w(p) \quad (4.9a)$$

Bezpośrednio z równania pracy wirtualnej można otrzymać:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) = & - \int_{\Gamma} [T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) - \int_{\Omega_0} q_0(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega_0(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.9b)$$

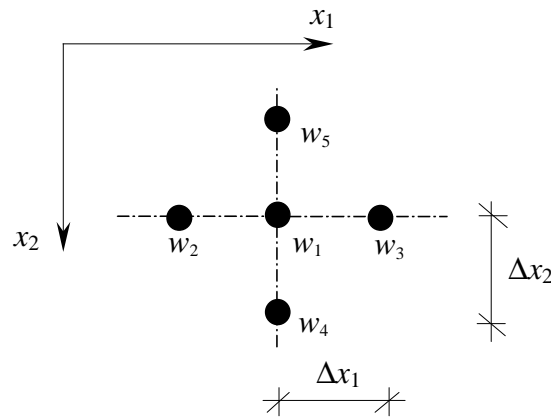
a po dyskretyzacji elementami brzegowymi przyjmuje formę:

$$\begin{aligned}
 w(x_1, x_2) = & - \sum_{k=1}^{le} w_k \cdot \int_{\Gamma_k} T_n^* \cdot d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{le} \varphi_n \cdot \int_{\Gamma_k} M_n^* \cdot d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{le} \varphi_s \cdot \int_{\Gamma_k} M_{ns}^* \cdot d\Gamma_k + \\
 & + \sum_{k=1}^{le} T_n \cdot \int_{\Gamma_k} w^* \cdot d\Gamma_k - \sum_{k=1}^{le} M_n \cdot \int_{\Gamma} \varphi_n^* \cdot d\Gamma_k - \sum_i q_0(\mathbf{y}) \cdot \int_{\Omega_0} w^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot d\Omega_0 + \sum_{l=1}^{Lp} p \cdot \int_{\Omega} w^* d\Omega
 \end{aligned} \quad (4.9c)$$

gdzie le jest liczbę elementów brzegowych i Lp jest liczbą obciążeń ciągłych rozłożonych na powierzchni płyty.

4.5. OBLICZANIE MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH W PŁYCCIE SPOCZYWAJĄCEJ NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

Obliczanie momentów zginających przeprowadza się za pomocą ilorazu różnicowego przy użyciu przemieszczeń pięciu sąsiadujących ze sobą punktów (Rys. 42).



Rys. 42. Budowa ilorazu różnicowego

Momenty zginające będą wówczas wyrażone wzorami:

$$M_{x_1} = -D \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x_1^2} + \nu_p \frac{\Delta^2 w}{\Delta x_2^2} \right) \quad (4.10)$$

$$M_{x_2} = -D \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x_2^2} + \nu_p \frac{\Delta^2 w}{\Delta x_1^2} \right) \quad (4.11)$$

gdzie:

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x_1^2} = \frac{w_2 - 2w_1 + w_3}{(\Delta x_1)^2} \quad (4.12)$$

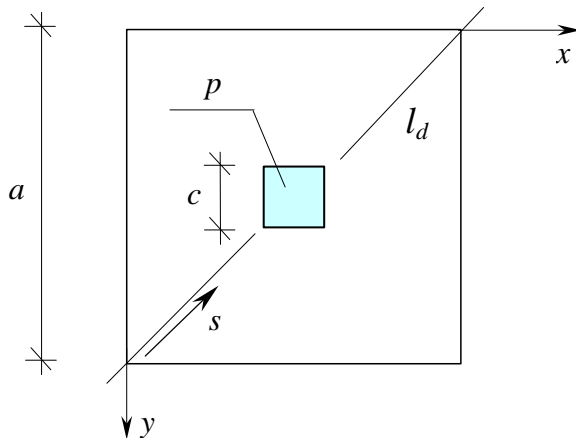
$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x_2^2} = \frac{w_4 - 2w_1 + w_5}{(\Delta x_2)^2} \quad (4.13)$$

4.6. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

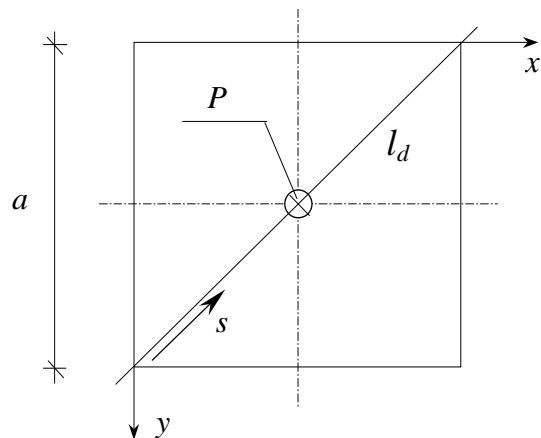
W celu uproszczenia oznaczeń przyjęto, że oś x_1 odpowiada oznaczenia osi x , a oś x_2 odpowiada osi y globalnego układu współrzędnych.

W podrozdziale 4.6.1. analizowana jest płyta kwadratowa, mająca wszystkie krawędzie swobodne (Rys. 43) spoczywająca na podłożu typu Winklera z uwzględnieniem więzów jednostronnych. Obciążenie p rozłożone jest na powierzchni kwadratu. Zadanie rozwiązuje się iteracyjnie, eliminując w kolejnych iteracjach punkty kolokacji wewnątrz obszaru płyty, w których występuje ujemna reakcja R_0 . Wyniki obliczeń porównane są z rozwiązaniami **MEB** [4, 9, 32, 62].

W podrozdziale 4.6.2. przeprowadza się analizę płyty kwadratowej, mającej wszystkie krawędzie swobodne i spoczywającej na podłożu typu półprzestrzeni sprężystej z więzami dwustronnymi. Obciążenie w postaci siły skupionej przyłożone jest w środku płyty (Rys. 44). Wyniki obliczeń porównane są z rozwiązaniami **MEB** [62].



Rys. 43. Płyta kwadratowa, spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera



Rys. 44. Płyta kwadratowa, spoczywająca na podłożu sprężystym typu półprzestrzeni sprężystej

4.6.1. Płyta kwadratowa, mająca wszystkie krawędzie swobodne, spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera, obciążona równomiernie na wycinku powierzchni

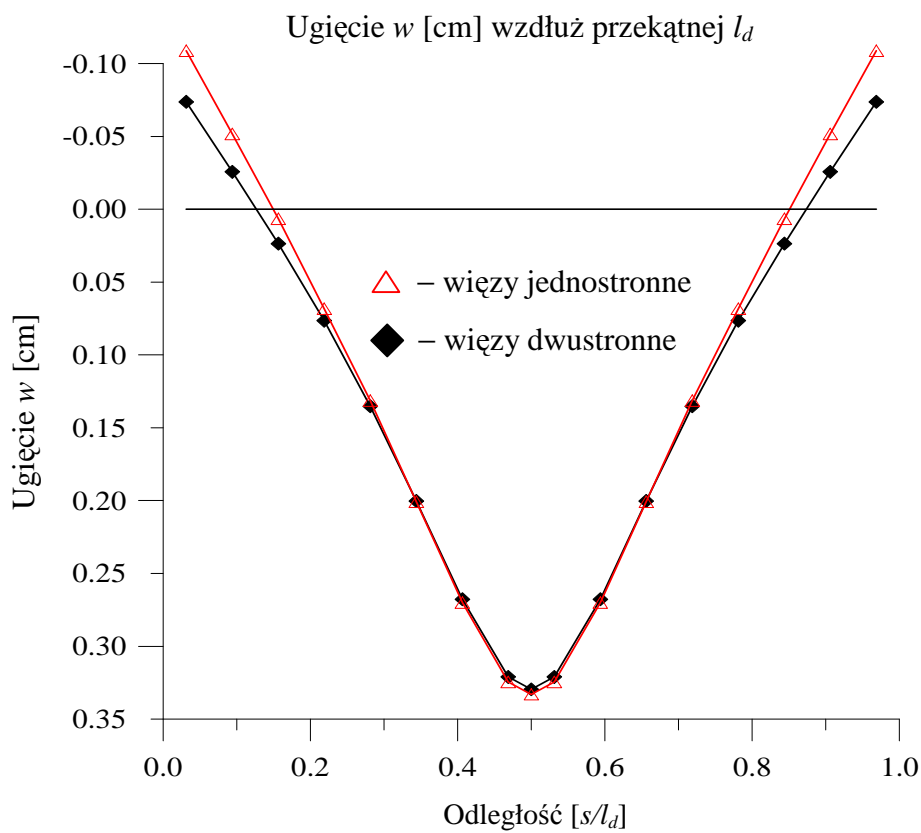
Przykład 1.

$$a = 400 \text{ cm}, h_p = 20 \text{ cm}, E = 2.6 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, \nu_p = 0.15, \varepsilon = \delta/d = 0.001,$$

$$c = 50 \text{ cm}, k = 50 \text{ N/cm}^3, p = 300 \text{ N/cm}^2,$$

liczba elementów brzegowych: 64,

liczba wewnętrznych punktów kolokacji: 256.



Rys. 45. Płyta kwadratowa, spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera. Wykres ugięcia wzdłuż przekątnej l_d

Tabela 4.1. Ugięcie w środku płyty

	w_{\max} [cm]	
	Więzy jednostronne	Więzy dwustronne
MEB - praca	0.333087	0.329574
Kirchhoff [32]	0.338520	0.333560
Kirchhoff [4]	0.333604	0.329870
Reissner [62]	0.346120	0.341456
Reissner [9]	0.341402	0.337788

Tabela 4.2. Moment zginający w środku płyty

$M_{\max} [\text{N}\cdot\text{cm}/\text{cm}]\cdot 10^6$, MEB - praca	
Więzy jednostronne	Więzy dwustronne
0.116912	0.115320

Liczba iteracji – 3.

Przykład 2.
 $a = 400 \text{ cm}$, $h_p = 30$, $E = 2.6 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, $\nu_p = 0.15$, $\varepsilon = \delta/d = 0.001$,

 $c = 20 \text{ cm}$, $k = 500 \text{ N/cm}^3$, $p = 1000 \text{ N/cm}^2$,

liczba elementów brzegowych: 64,

liczba wewnętrznych punktów kolokacji: 256.

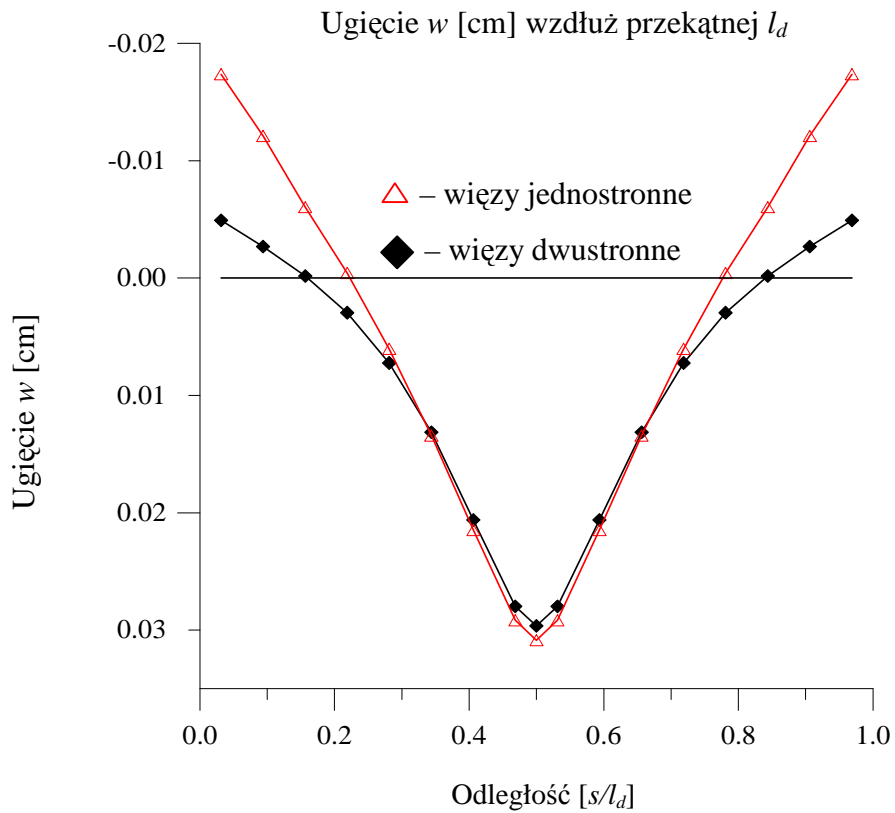
Rys. 46. Płyta kwadratowa, spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera. Wykres ugięcia wzdłuż przekątnej l_d

Tabela 4.3. Ugięcie w środku płyty

	w_{\max} [cm]	
	Więzy jednostronne	Więzy dwustronne
MEB - praca	0.030895	0.029642
Kirchhoff [32]	0.031942	0.029947
Kirchhoff [4]	0.031344	0.029597
Reissner [62]	0.035710	0.033593
Reissner [9]	0.035083	0.033335

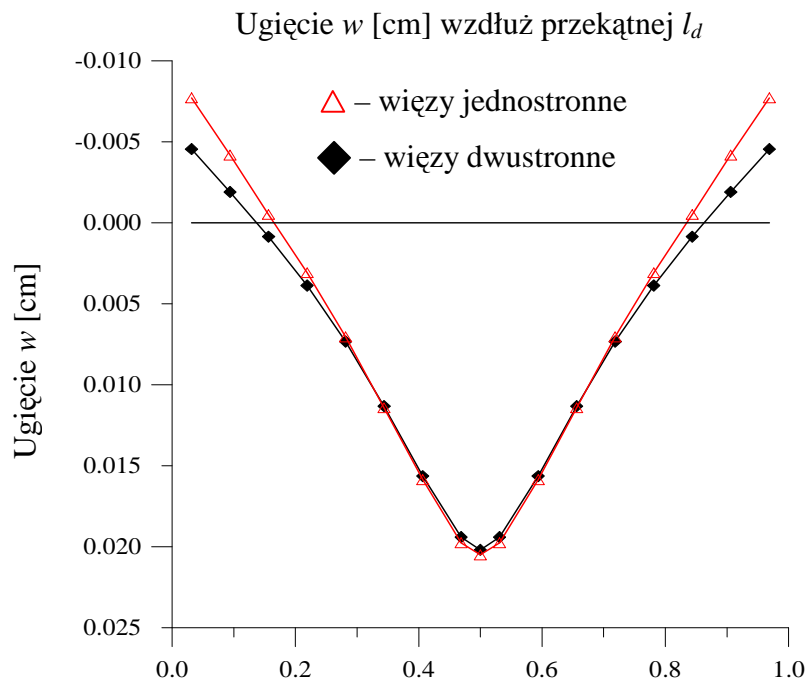
Tabela 4.4. Moment zginający w środku płyty

M_{\max} [N·cm/cm]·10 ⁵ , MEB - praca	
Więzy jednostronne	Więzy dwustronne
0.852430	0.834393

Liczba iteracji – 4.

Przykład 3.

$a = 400$ cm, $h_p = 40$, $E = 2.6 \times 10^6$ N/cm², $\nu_p = 0.15$, $\varepsilon = \delta/d = 0.001$,
 $c = 20$ cm, $k = 500$ N/cm³, $p = 1000$ N/cm²,
 liczba elementów brzegowych: 64,
 liczba wewnętrznych punktów kolokacji: 256.



Rys. 47. Płyta kwadratowa, spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera. Wykres ugięcia wzdłuż przekątnej l_d

Tabela 4.5. Ugięcie w środku płyty

	w_{\max} [cm]	
	Więzy jednostronne	Więzy dwustronne
MEB - praca	0.020518	0.020194
Kirchhoff [32]	0.021287	0.020562
Kirchhoff [4]	0.020564	0.020206
Reissner [62]	0.024273	0.023548
Reissner [9]	0.023634	0.023296

Tabela 4.6. Moment zginający w środku płyty

M_{\max} [N·cm/cm]·10 ⁵ , MEB - praca	
Więzy jednostronne	Więzy dwustronne
0.933794	0.922606

Liczba iteracji – 3.

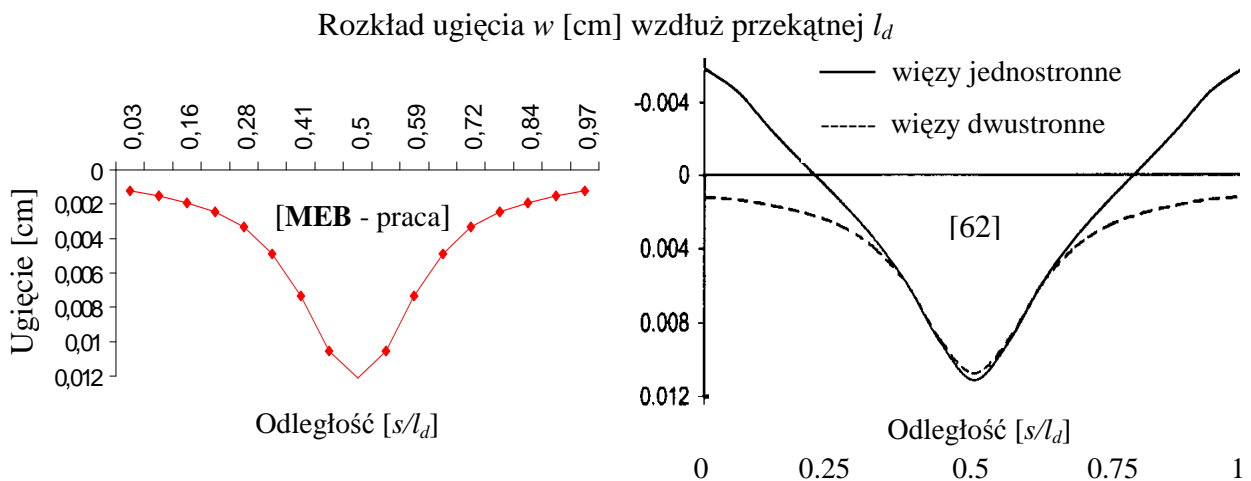
4.6.2. Płyta kwadratowa, mająca wszystkie krawędzie swobodne, spoczywająca na podłożu sprężystym typu półprzestrzeni sprężystej, obciążona siłą skupioną w środku

$$a = 100 \text{ cm}, h_p = 2 \text{ cm}, E = 2.6 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, \nu_p = 0.3, \varepsilon = \delta/d = 0.001,$$

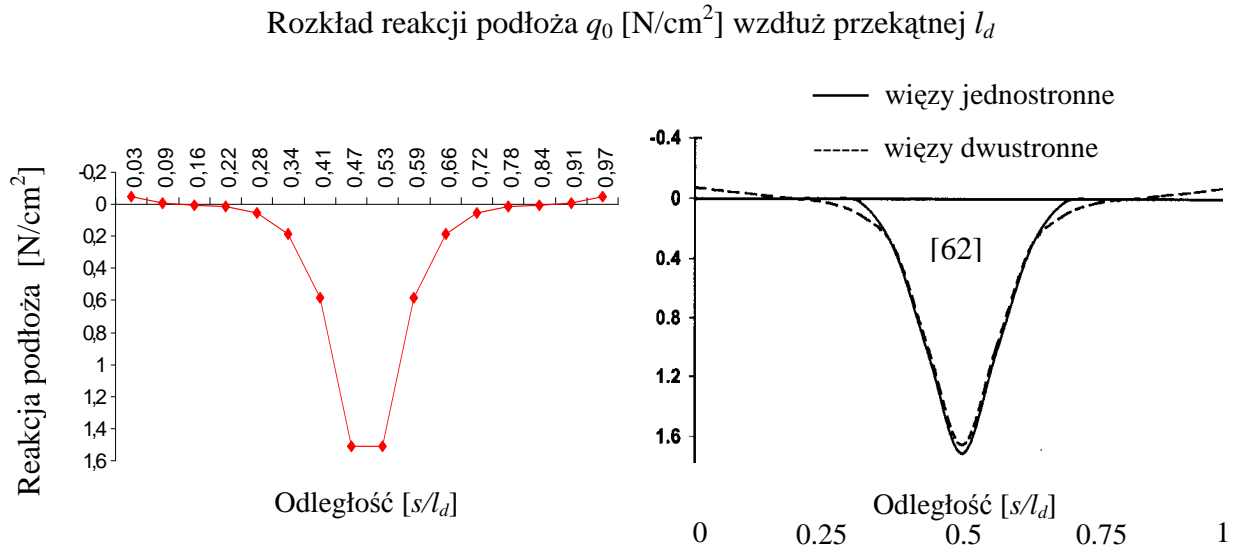
$$E_0 = 3000 \text{ N/cm}^2, \nu_0 = 0.3, P = 1000 \text{ N},$$

liczba elementów brzegowych: 64,

liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256.



Rys. 48a. Płyta kwadratowa, spoczywająca na podłożu sprężystym typu półprzestrzeni sprężystej. Wykres ugięcia wzdłuż przekątnej l_d



Rys. 48b. Płyta kwadratowa, spoczywająca na podłożu sprężystym typu półprzestrzeni sprężystej. Wykres reakcji podłoża wzdłuż przekątnej l_d

Tabela 4.7. Ugięcie w środku płyty

w_{\max} [cm]	
MEB - praca	[62]
0.012094	0.0107

Tabela 4.8. Reakcja podłoża w środku płyty

$q_{0 \max}$ [N/cm ²]	
MEB - praca	[62]
1.509720	1.60

Tabela 4.9. Moment zginający w środku płyty

M_{\max} [N·cm/cm]·10 ³
MEB - praca
0.281743