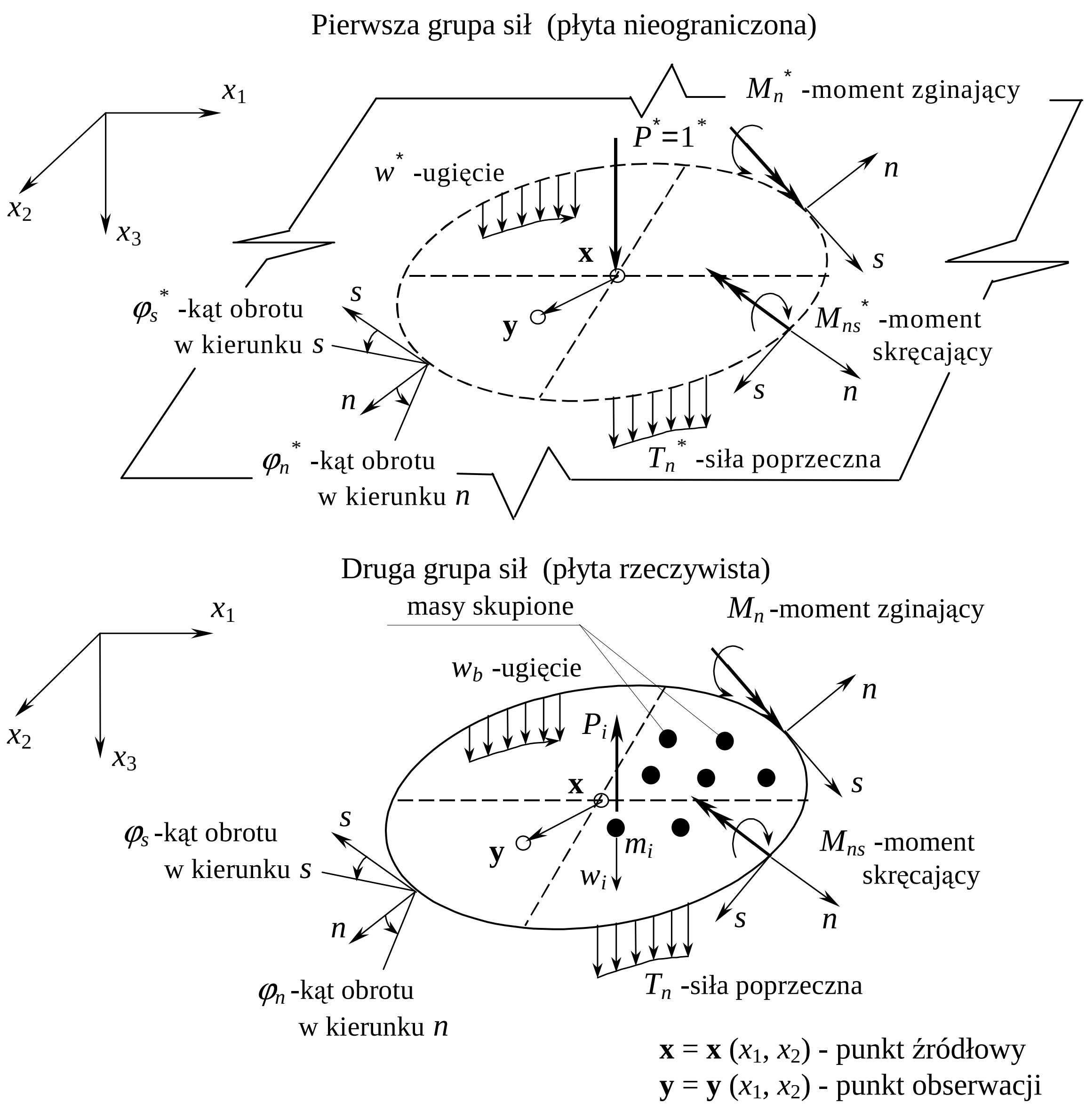
5.1. CAŁKOWE SFORMUŁOWANIE ZADANIA DRGAŃ WŁASNYCH PŁYTY

Rozważa się problem drgań własnych płyty. Założono dyskretny rozkład masy. W każdym z wewnętrznych punktów kolokacji związanych z pojedynczą masą skupioną wprowadza się przemieszczenie w_i, przyspieszenie $\ddot{w}_i$ oraz siłę bezwładności P_i (Rys. 49). Do rozwiązania zadania stosuje się rozwiązanie fundamentalne dla statyki.



Rys. 49. Wielkości występujące w brzegowych równaniach całkowych

Dla drgań harmonicznych można zapisać:

$$w_i = \tilde{W}_i \sin \omega t \tag{5.1}$$

stąd

$$\ddot{w}_i = -\omega^2 \cdot \tilde{W}_i \sin \omega t \tag{5.2}$$

Wówczas amplituda siły bezwładności $\tilde{P}_i = \tilde{B}_i$ i jest opisana zależnością:

$$\tilde{B}_i = \omega^2 m_i \cdot \tilde{W}_i \tag{5.3}$$

Brzegowe równania całkowe mają postać:

$$\begin{aligned} & c(\mathbf{x}) \cdot \tilde{w}(\mathbf{x}) + \int_\Gamma \left[T_n^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \tilde{w}(y) - M_n^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \tilde{\varphi}_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \tilde{\varphi}_s(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\ & = \int_\Gamma \left[\tilde{T}_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \tilde{M}_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \tilde{M}_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \varphi_s^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \sum_{i=1}^{N} \omega^2 m_i \cdot \tilde{W}_i \cdot w^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{5.4}$$

oraz

$$\begin{aligned} & c(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}) + \int_\Gamma \left[\overline{T}^*_n(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \tilde{w}(\mathbf{y}) - \overline{M}^*_n(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \tilde{\varphi}_n(\mathbf{y}) - \overline{M}^*_{ns}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\ & = \int_\Gamma \left[\tilde{T}_n(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \tilde{M}_n(\mathbf{y}) \cdot \overline{\varphi}^*_n(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \tilde{M}_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \overline{\varphi}^*_s(\mathbf{y},\mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \sum_{i=1}^{N} \omega^2 m_i \cdot \tilde{W}_i \cdot \overline{w}^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{5.5}$$

gdzie

$$\begin{aligned} & \left\{ \overline{T}^*_n(\mathbf{y},\mathbf{x}), \overline{M}^*_n(\mathbf{y},\mathbf{x}), \overline{M}^*_{ns}(\mathbf{y},\mathbf{x}), \overline{w}^*(\mathbf{y},\mathbf{x}), \overline{\varphi}^*_n(\mathbf{y},\mathbf{x}), \overline{\varphi}^*_s(\mathbf{y},\mathbf{x}) \right\} = \\ & = \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left\{ T_n^*(\mathbf{y},\mathbf{x}), M_n^*(\mathbf{y},\mathbf{x}), M_{ns}^*(\mathbf{y},\mathbf{x}), w^*(\mathbf{y},\mathbf{x}), \varphi_n^*(\mathbf{y},\mathbf{x}), \varphi_s^*(\mathbf{y},\mathbf{x}) \right\} \end{aligned}$$

5.1.1. Równania ruchu płyty

Po dyskretyzacji brzegu płyty elementami brzegowymi, układ równań algebraicznych można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_X & \mathbf{G}_1 & -\lambda\, \mathbf{E}_1 \mathbf{M}_p \\ \mathbf{\Delta} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 & -\lambda\, \mathbf{E}_2 \mathbf{M}_p + \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{\mathbf{w}}_{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{5.6}$$

gdzie

$$\mathbf{M}_P = \mathrm{diag}(m_1, m_2, ..., m_N) \tag{5.7}$$

$\lambda = \omega^2$, $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową oraz N jest liczbą mas skupionych. Eliminacja amplitud wielkości brzegowych $\mathbf{X}$ i φ_s z równania macierzowego (5.6) prowadzi do standardowego problemu własnego:

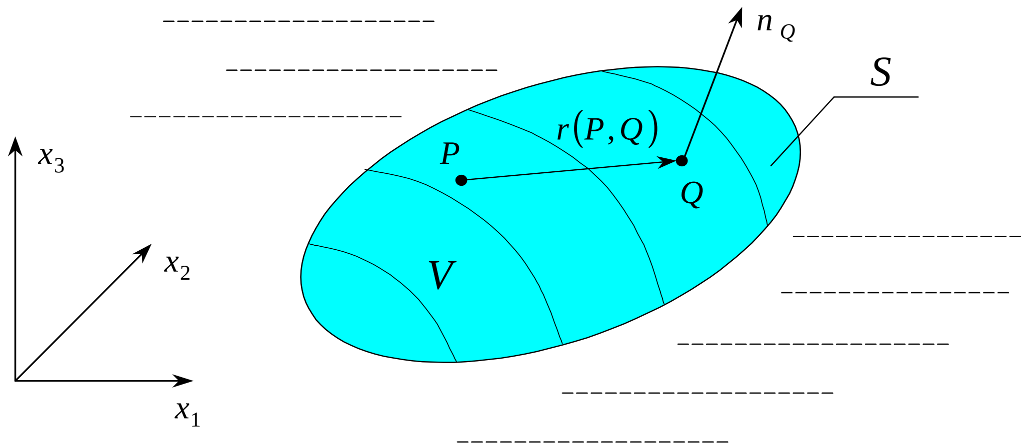
$$\left\{ \mathbf{A} - \overline{\lambda} \mathbf{I} \right\} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{(m)} = \mathbf{0} \tag{5.8}$$

gdzie $\overline{\lambda} = 1/\omega^2$ oraz

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{E}_2 \mathbf{M}_\mathrm{p} - \left(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_3 \mathbf{\Delta} \right) \cdot \left[\mathbf{G}_\mathrm{X} + \mathbf{G}_1 \right]^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{M}_\mathrm{p} \right\}. \tag{5.9}$$

5.2. DRGANIA CIAŁA ZANURZONEGO W PŁYNIE

Rozważa się małe drgania ciała zanurzonego w płynie. Płyn rozumiany jest jako ciecz lub gaz. Ciało o objętości V i powierzchni S zanurzone jest w płynie (Rys. 50).



Rys. 50. Drgania ciała zanurzonego w płynie

Zakłada się, że płyn jest ściśliwy i nielepki. Rozważa się małe drgania ciała wokół położenia równowagi.

Potencjał pola prędkości płynu

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot e^{i\omega t} \tag{5.10}$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$,

spełnia równanie Helmholtz'a

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} + \kappa^2 \tilde{\varphi} = 0 \tag{5.11}$$

gdzie $\kappa = \dfrac{\omega}{c}$, ω jest częstością kołowa drgań własnych, c jest prędkością dźwięku w płynie oraz $\nabla^2 \tilde{\varphi} = \dfrac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_3^2}$ jest operatorem Laplace'a, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = v_i$.

Rozwiązanie równania (5.10) można przedstawić w postaci potencjału warstwy pojedynczej i warstwy podwójnej za pomocą następującego równania całkowego [52]:

$$C(\mathrm{P}) \cdot \tilde{\varphi}(\mathrm{P}) = -\int_S \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathrm{Q})}{\partial n_\mathrm{Q}} \cdot \varphi^*(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \cdot dS_\mathrm{Q} + \int_S \tilde{\varphi}(\mathrm{Q}) \frac{\partial \varphi^*(\mathrm{P},\mathrm{Q})}{\partial n_\mathrm{Q}} \cdot dS_\mathrm{Q} \tag{5.12}$$

gdzie $C(\mathrm{P})$ jest współczynnikiem, który wynosi:

$C(\mathrm{P}) = 1$, kiedy punkt P leży na zwnątrz powierzchni S,

$C(\mathrm{P}) = 0.5$, kiedy punkt P leży na gładkiej powierzchni S,

$C(\mathrm{P}) = 0$, kiedy punkt P leży wewnątrz ciała o objętości V,

$$\varphi^*(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-i\cdot\kappa\cdot r(\mathrm{P},\mathrm{Q}))}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})} \tag{5.13}$$

jest rozwiązaniem podstawowym równania Helmholtz'a (5.11).

Warunki brzegowe na powierzchni S są typu Neumann'a. Są to warunki sprzężenia drgań płynu i ciała. Mają one postać:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial u_n}{\partial t} \tag{5.14}$$

gdzie

$$u_n = \tilde{u}_n \cdot e^{i\,\omega\,t} \tag{5.15}$$

jest składową normalną przemieszczenia ciała.

Ciśnienie płynu na powierzchni ciała wynosi

$$p = -\rho_{\mathrm{c}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{5.16}$$

gdzie ρ_{c} jest gęstością płynu.

Wykorzystując równania (5.14) i (5.16) można równanie (5.12) zapisać w postaci:

$$C(\mathrm{P})\overline{p}(\mathrm{P}) = -\omega^2\rho_{\mathrm{c}}\cdot\int_S \tilde{u}_n(\mathrm{Q})\cdot\varphi^*(\mathrm{P},\mathrm{Q})\cdot dS_{\mathrm{Q}} + \int_S \overline{p}(\mathrm{Q})\cdot\frac{\partial\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q})}{\partial n_Q}\cdot dS_{\mathrm{Q}} \tag{5.17}$$

Ciśnienie płynu na ciało opisywane jest przez brzegowe równanie całkowe (5.17). Do jego rozwiązania stosuje się metodę elementów brzegowych. Po dyskretyzacji powierzchni ciała za pomocą elementów brzegowych, można równanie (5.17) zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{C}\cdot\tilde{\mathbf{p}} = -\omega^2\rho_{\mathrm{c}}\mathbf{A}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{B}\cdot\tilde{\mathbf{p}} \tag{5.18}$$

gdzie $\mathbf{C}$ jest diagonalną macierzą współczynników $C(\mathrm{P})$, $\overline{\mathbf{p}}$ jest wektorem amplitud ciśnień, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są kwadratowymi, zespolonymi macierzami zależnymi od częstości kołowej drgań oraz $\overline{\mathbf{u}}_n$ jest wektorem amplitud przemieszczeń normalnych ciała. Elementy $A_{m\,n}$ i $B_{m\,n}$ macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ określają wzory:

$$A_{m\,n} = \sum_{j=1}^{e}\int_{S_j} N_n^{(j)}\cdot\varphi^*(m,\mathrm{Q})\cdot dS_{\mathrm{Q}} \tag{5.19}$$

$$B_{m\,n} = \sum_{j=1}^{e}\int_{S_j} N_n^{(j)}\cdot\frac{\partial\varphi^*(m,\mathrm{Q})}{\partial n_{\mathrm{Q}}}\cdot dS_{\mathrm{Q}} \tag{5.20}$$

gdzie $N_n^{(j)}$ jest funkcją interpolacyjną (funkcją kształtu dla elementu „ j ”oraz węzła „n”), e jest liczbą elementów mających wspólny węzeł „n”. Całki (5.18) i (5.19) oblicza się numerycznie stosując metodę Gaussa. Całka $A_{m\,n}$ ma osobliwość typu $1/r$ i do jej obliczania trzeba stosować metody analityczno-numeryczne.

Z równania (5.18) po obliczeniu otrzymuje się:

$$\tilde{\mathbf{p}} = -\omega^2 \rho_c \, \mathbf{B}_1^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_n \tag{5.21}$$

gdzie $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C} - \mathbf{B}$.

Jeżeli założy się, że płyn nie jest ściśliwy (można tak założyć, gdy drgania w płynie odbywają się z niskimi częstościami), tzn. $c \to \infty$, wtedy rozwiązanie podstawowe

$$\varphi^*(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})} \tag{5.22}$$

a macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą macierzami rzeczywistymi.

Ruch ciała po dyskretyzacji można zapisać macierzowo:

$$\left(\mathbf{K}_\mathrm{S} - \omega^2 \mathbf{M}_\mathrm{S}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{P}} \tag{5.23}$$

gdzie $\mathbf{K}_\mathrm{S}$ i $\mathbf{M}_\mathrm{S}$ są macierzami sztywności i mas ciała, a $\tilde{\mathbf{u}}$ i $\tilde{\mathbf{P}}$ są wektorami amlitud przemieszczeń i sił węzłowych. Macierzowo można zapisać:

$$\tilde{\mathbf{P}} = -\mathbf{T}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}} \tag{5.24}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_n = \mathbf{T}_2 \cdot \tilde{\mathbf{u}} \tag{5.25}$$

gdzie $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$ są macierzami transformacji. Wykorzystując zależności (5.24), (5.25) i (5.21) w równaniu (5.23) ostatecznie otrzymuje się:

$$\left[\mathbf{K}_\mathrm{S} - \omega^2 \left(\mathbf{M}_\mathrm{S} + \mathbf{M}_\mathrm{C}\right)\right] \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{5.26}$$

gdzie $\mathbf{M}_\mathrm{C}$ jest macierzą mas płynu,

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}_2 \tag{5.27}$$

oraz $\mathbf{H} = \rho_c \cdot \mathbf{B}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}$.

Równanie (5.26) przedstawia uogólniony problem własny. Obecność płynu objawią się za pomocą pełnej i niesymetrycznej macierzy mas płynu $\mathbf{M}_\mathrm{C}$, którą dołącza się do macierzy mas ciała $\mathbf{M}$.

5.2.1. Drgania płyty zanurzonej w cieczy

Rozważany jest problem drgań własnych płyty cienkiej całkowicie zanurzonej w cieczy. Do rozwiązania zadania stosuje się metodę elementów brzegowych. Niech oś x_1 odpowiada osi x, a oś x_2 odpowiada osi y globalnego układu współrzędnych. W równaniach całkowych (5.4) i (5.5) należy do składowej wektora siły bezwładności związanej z masą płyty B_i dodać składową wektora ciśnienia hydrodynamicznego cieczy P_i^{C}, tzn.:

$$P_i = B_i + P_i^{\mathrm{C}} \tag{5.28}$$

Płyta otoczona jest ze wszystkich stron cieczą. Przyjmuje się ciecz nieściśliwy i nielepką. Wektor przyspieszenia cieczy w punkcie x, y jest dany równaniem [53, 54]:

$$\ddot{w}(x,y,t) = -\frac{1}{4\pi\rho_{\mathrm{c}}}\int_{\Omega}\Delta p\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{r}\right]\cdot dxdy\bigg|_{z\to 0} \tag{5.29a}$$

gdzie $\Delta p = p_1 - p_2$ jest ciśnieniem hydrodynamcznym na powierzchnię płyty i ρ_{c} jest gęstością cieczy. Po dyskretyzacji powierzchni płyty na prostokątne elementy typu „constans", równanie (5.29a) może być zapisane w formie:

$$\ddot{w}(x_m, y_m, t) = -\frac{1}{4\pi\rho_{\mathrm{c}}}\sum_{n=1}^{N}\Delta p_n\int_{\Delta\Omega_n}\frac{\partial^2}{\partial z_m^2}\left[\frac{1}{r}\right]\cdot dxdy\bigg|_{z_m\to 0} \tag{5.29b}$$

lub inaczej:

$$\ddot{w}(x_m, y_m, t) = -\frac{1}{4\pi\rho_{\mathrm{c}} a_x a_y}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(P_n\cdot H_{m,n}\right) \tag{5.29c}$$

gdzie

$$H_{m,n} = \int_{\Delta\Omega_n}\frac{\partial^2}{\partial z_m^2}\left[\frac{1}{r}\right]\cdot dxdy\bigg|_{z_m\to 0} \tag{5.30}$$

i $P_n = \Delta p_n\cdot a_x\cdot a_y$. Parametry a_x i a_y opisują wymiary wewnętrznego powierzchniowego elementu brzegowego (Rys.51).

Po wykonaniu obliczeń zgodnie z [53, 54] otrzymuje się:

$$H_{m,n} = -\frac{1}{y_p}\left(\frac{x_k}{r_2}-\frac{x_p}{r_1}\right)+\frac{1}{x_k}\left(\frac{y_k}{r_3}-\frac{y_p}{r_2}\right)+\frac{1}{y_k}\left(\frac{x_k}{r_3}-\frac{x_p}{r_4}\right)-\frac{1}{x_p}\left(\frac{y_k}{r_4}-\frac{y_p}{r_1}\right) \tag{5.31}$$

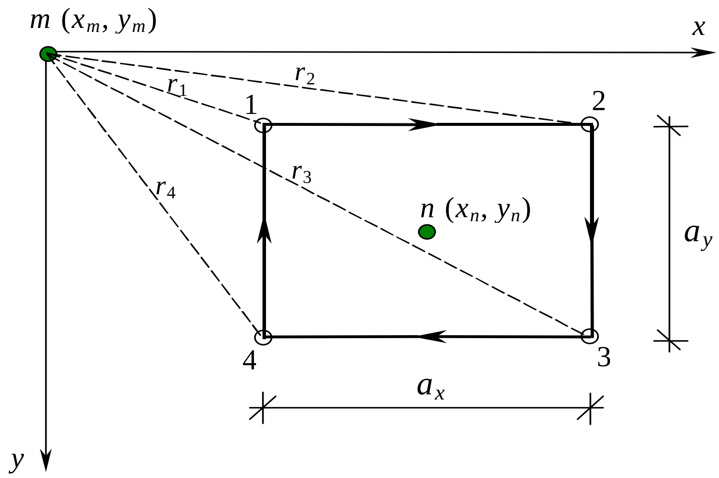
gdzie

$$y_p = y_n - a_y/2 - y_m, \quad y_k = y_n + a_y/2 - y_m,$$

$$x_p = x_n - a_x/2 - x_m, \quad x_k = x_n + a_x/2 - x_m,$$

$$r_1 = \sqrt{y_p^2 + x_p^2}\ ,\ r_2 = \sqrt{y_p^2 + x_k^2}\ ,$$

$$r_3 = \sqrt{y_k^2 + x_k^2}\ ,\ r_4 = \sqrt{y_k^2 + x_p^2}\ .$$



Rys. 51. Wewnętrzny powierzchniowy element brzegowy

W notacji macierzowej równanie (5.29b) może być zapisane:

$$\ddot{\mathbf{w}} = -\frac{1}{4\pi\rho_c} \cdot \frac{1}{a_x a_y} \mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \tag{5.32}$$

gdzię **H** jest $(N \times N)$ macierzą kwadratową, której każdy element jest zdefiniowany wzorem (5.31). Stąd, można obliczyć siły hydrodynamiczne działające na powierzchnię płyty :

$$\mathbf{P} = -\mathbf{M}_\mathrm{C} \cdot \ddot{\mathbf{w}} \tag{5.33}$$

gdzie $\mathbf{M}_\mathrm{C} = 4\pi \cdot a_x a_y \mathbf{H}^{-1}$ jest macierzą mas cieczy.

5.2.2 Równania ruchu płyty zanurzonej w cieczy

Po dyskretyzacji brzegu płyty elementami brzegowymi oraz wnętrza płyty prostokątnymi elementami powierzchniowymi, układ równań ruchu można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_\mathrm{X} & \mathbf{G}_1 & -\lambda\,\mathbf{E}_1\overline{\mathbf{M}} \\ \mathbf{\Delta} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 & -\lambda\,\mathbf{E}_2\overline{\mathbf{M}} + \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{\mathbf{w}}_{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

gdzie

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_\mathrm{P} + \mathbf{M}_\mathrm{C}\,, \tag{5.34}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{P}} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, ..., m_N) \tag{5.35}$$

$\lambda = \omega^2$ oraz $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową. Eliminacja amplitud wielkości brzegowych $\mathbf{X}$ i φ_s z równania macierzowego (5.34) prowadzi do standardowego problemu własnego:

$$\left\{\overline{\mathbf{A}} - \overline{\lambda}\cdot\mathbf{I}\right\}\cdot \tilde{\mathbf{w}}_{(m)} = \mathbf{0} \tag{5.36}$$

gdzie $\overline{\lambda} = 1/\omega^2$ oraz

$$\overline{\mathbf{A}} = \left\{\mathbf{E}_2\overline{\mathbf{M}} - (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_3\mathbf{\Delta})\cdot[\mathbf{G}_{\mathbf{X}} + \mathbf{G}_1]^{-1}\mathbf{E}_1\overline{\mathbf{M}}\right\} \tag{5.37}$$

5.3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

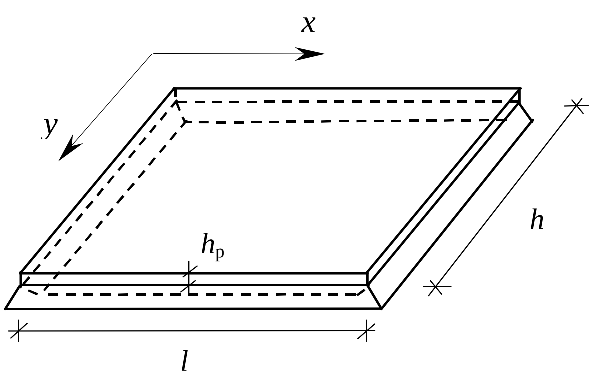
Obliczenia przeprowadza się dla płyt o różnym kształcie i różnych warunkach brzegowych. Brzeg płyty podzielony jest na elementy typu „constans” o równej długości. Całki quasi-diagonalne macierzy charakterystycznej obliczono analitycznie, a pozostałe numerycznie, wykorzystując dwunastopunktową kwadraturę Gaussa.

W podrozdziałach **5.3.1. – 5.3.6.** analizowane są drgania własne oraz drgania własne w ośrodku cieczy trzech typów płyt kwadratowych: podpartej swobodnie na czterech krawędziach, podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi oraz płytę wspornikową.

W podrozdziale **5.3.7.** analizowane są drgania płyty mostowej skośnej podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi.

5.3.1. Drgania własne płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach

Liczba elementów brzegowych: 120
liczba mas skupionych: 100



Rys. 52. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach

Własności płyty:

E_{p} = 205 GPa

ν_{p} = 0.3

h_{p} = 0.01 m

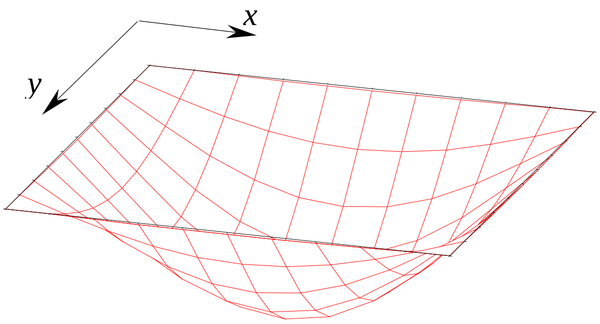
$h = l$ = 2.0 m

ρ_{p} = 7850 kg/m^3

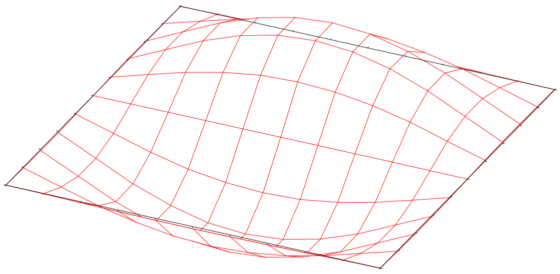
$\varepsilon = \delta/d$ = 0.01

Tabela 5.1. Częstości drgań własnych

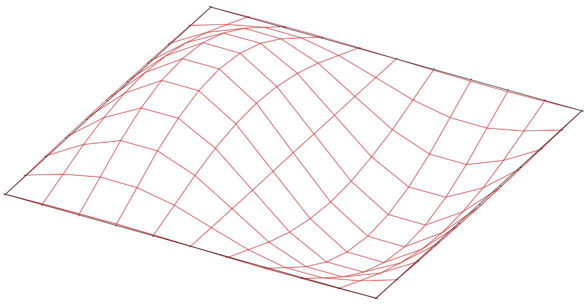
Częstość	Częstości drgań własnych [rad/s]	
	Rozwiązanie analityczne [37]	Rozwiązanie **MEB** - praca
1	76.313	76.318
2 i 3	190.783	190.710
4	305.253	304.918
5	381.567	380.805



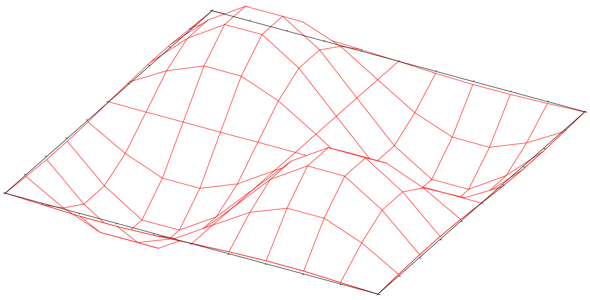
Rys. 53. Pierwsza postać drgań własnych płyty



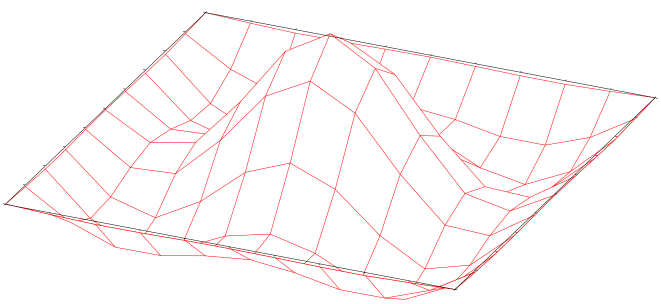
Rys. 54. Druga postać drgań własnych płyty



Rys. 55. Trzecia postać drgań własnych płyty



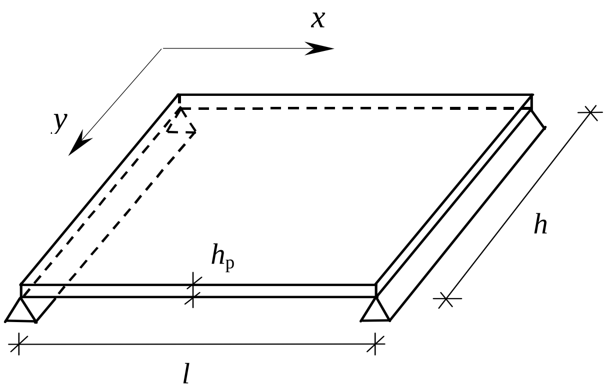
Rys. 56. Czwarta postać drgań własnych płyty



Rys. 57. Piąta postać drgań własnych płyty

5.3.2. Drgania własne płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi

Liczba elementów brzegowych: 120
liczba mas skupionych: 100



Rys. 58. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi

Własności płyty:

E_p = 205 GPa

ν_p = 0.3

h_p = 0.01 m

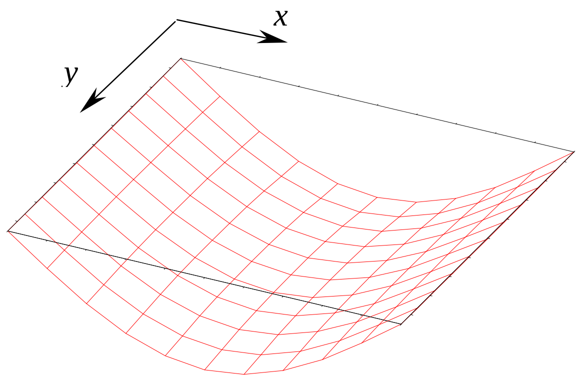
$h = l$ = 2.0 m

ρ_p = 7850 kg/m^3

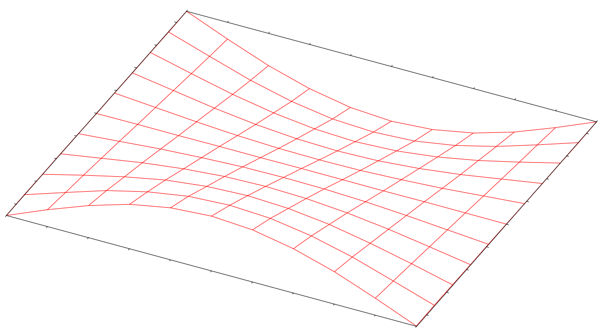
$\varepsilon = \delta / d$ = 0.01

Tabela 5.2. Częstości drgań własnych

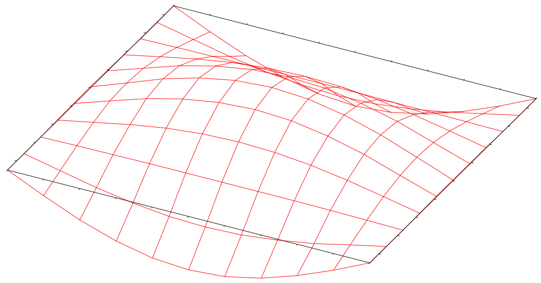
Częstość	Częstości drgań własnych [rad/s], rozwiązanie **MEB** - praca
1	37.820
2	62.211
3	144.054
4	150.346
5	180.438



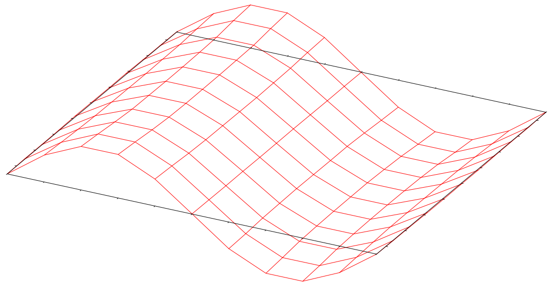
Rys. 59. Pierwsza postać drgań własnych płyty



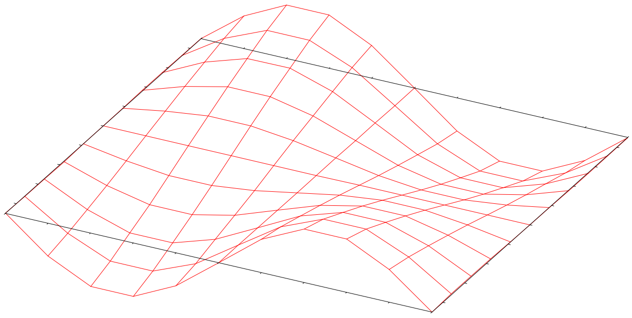
Rys. 60. Druga postać drgań własnych płyty



Rys. 61. Trzecia postać drgań własnych płyty



Rys. 62. Czwarta postać drgań własnych płyty

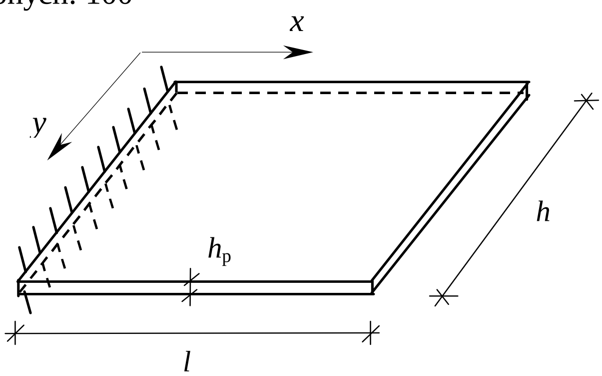


Rys. 63. Piąta postać drgań własnych płyty

5.3.3. Drgania własne płyty wspornikowej

Liczba elementów brzegowych: 120

liczba mas skupionych: 100



Rys. 64. Płyta wspornikowa

Własności płyty:

E_p = 205 GPa

ν_p = 0.3

h_p = 0.01 m

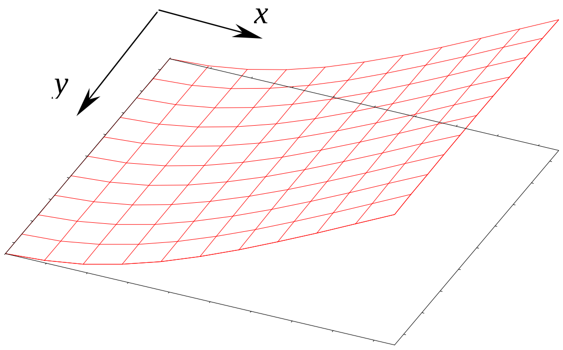
$h = l$ = 2.0 m

ρ_p = 7850 kg/m^3

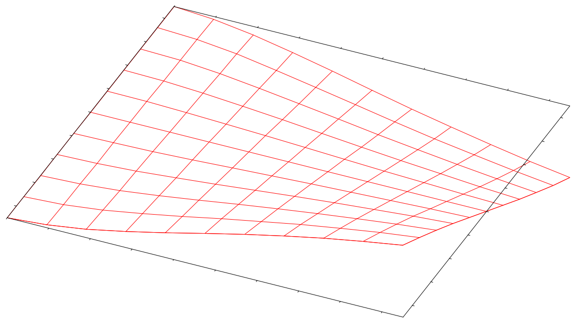
$\varepsilon = \delta / d$ =0.01

Tabela 5.3. Częstości drgań własnych

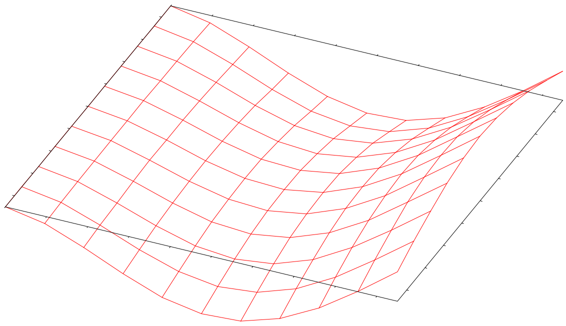
Częstość	Częstości drgań własnych [rad/s]	
	Rozwiązanie analityczne [17]	Rozwiązanie **MEB** - praca
1	13.508	13.385
2	33.043	32.860
3	82.889	83.157
4	106.162	106.762
5	120.506	120.241



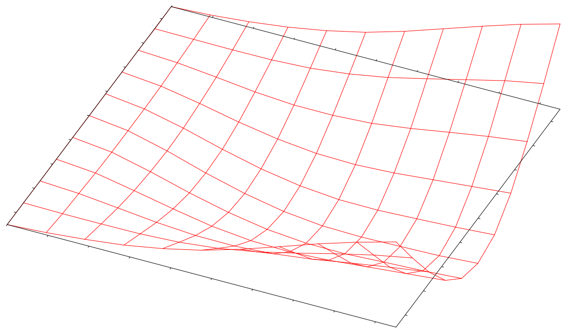
Rys. 65. Pierwsza postać drgań własnych płyty



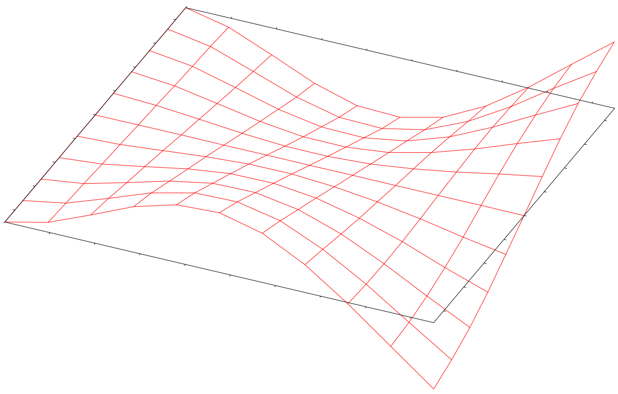
Rys. 66. Druga postać drgań własnych płyty



Rys. 67. Trzecia postać drgań własnych płyty



Rys. 68. Czwarta postać drgań własnych płyty



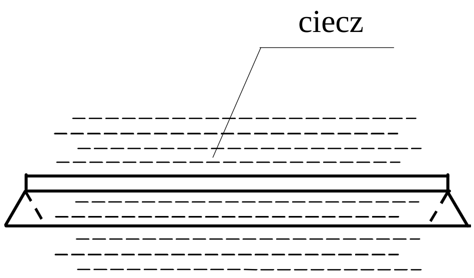
Rys. 69. Piąta postać drgań własnych płyty

5.3.4. Drgania własne płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach zanurzonej w cieczy

Liczba elementów brzegowych: 120,
liczba mas skupionych: 100,
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 100,
μ_p - gęstość płyty na jednostkę powierzchni

Własności płyty:

E_p = 205 GPa
ν_p = 0.3



Rys. 70. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach, zanurzona w cieczy

Własności płyty:

$h_{\mathrm{p}} = 0.01$ m

$h = l = 2.0$ m

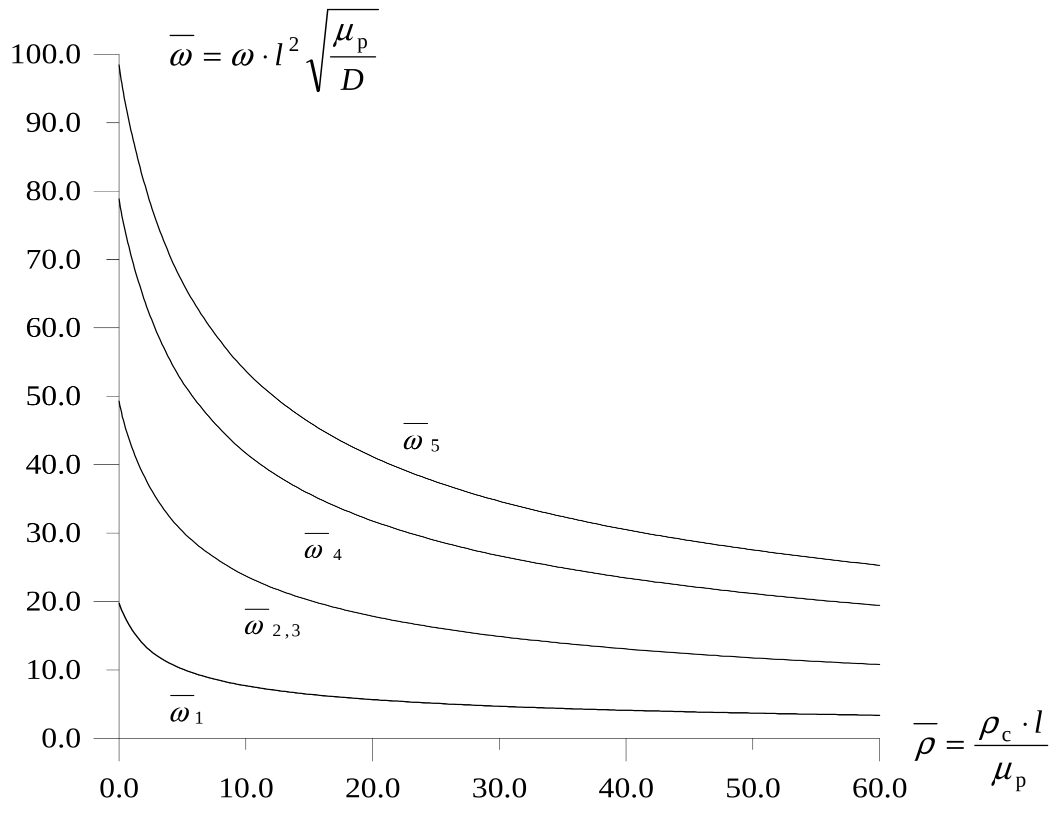
$\rho_{\mathrm{p}} = 7850$ kg/m^3

$\rho_{\mathrm{c}} = 1000$ kg/m^3

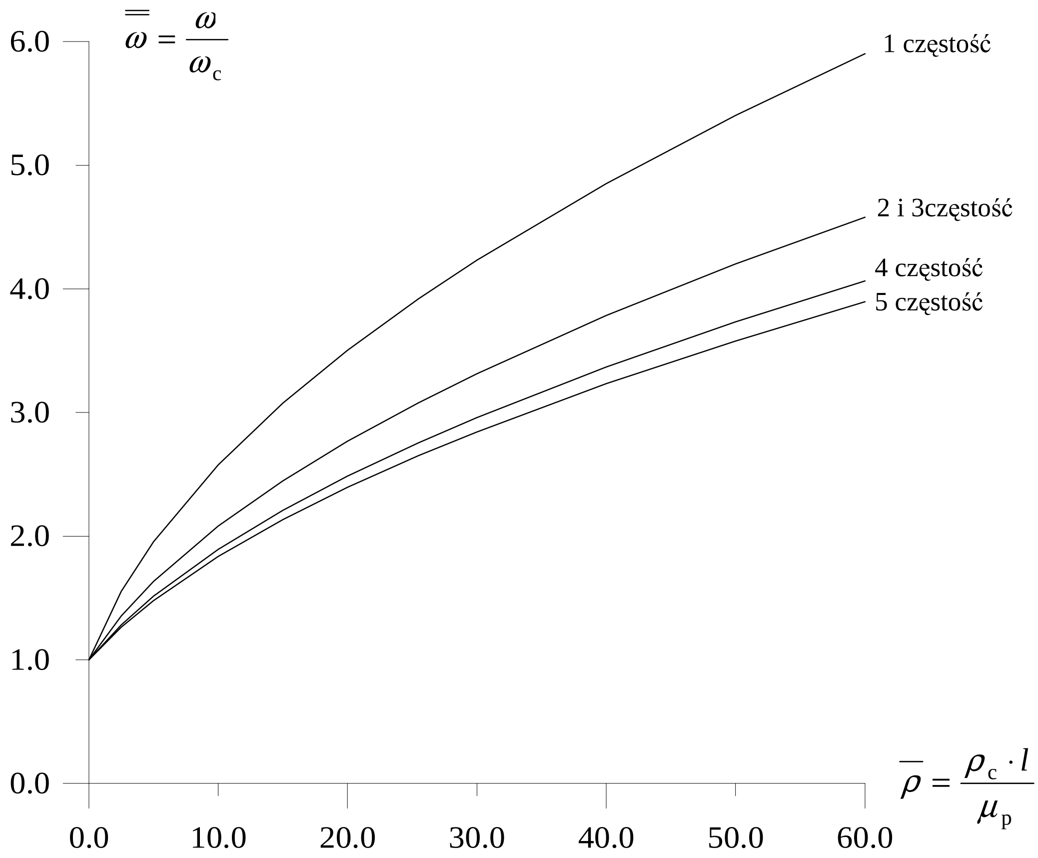
$\varepsilon = \delta / d = 0.01$

Tabela 5.4. Porównanie częstości drgań własnych

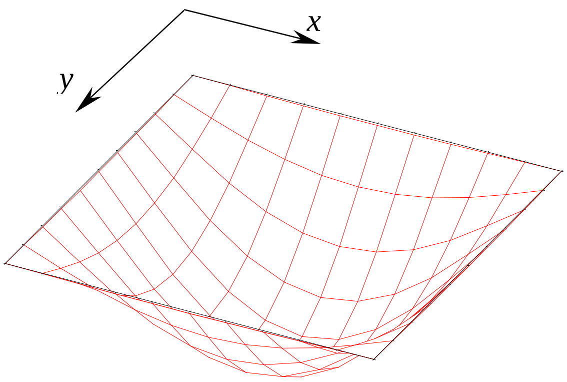
Częstość	Częstość drgań własnych [rad/s] - praca	
	Płyta **MEB**	Płyta + ciecz, **MEB** (ρ_{c} = 1000 kg/m^3)
1	76.318	19.471
2 i 3	190.710	61.940
4	304.918	110.670
5	380.805	143.722



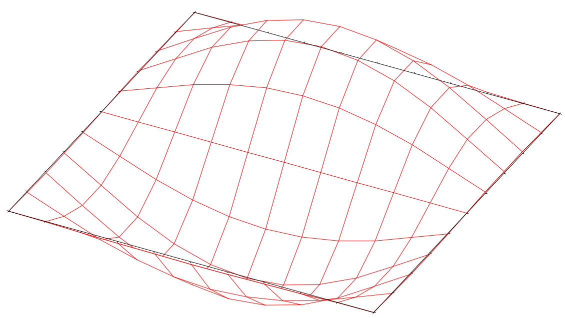
Rys. 71a. Zależność $\overline{\omega} - \overline{\rho}$ dla płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach, gdzie $\overline{\omega}$ - bezwymiarowa częstość drgań własnych płyty, $\overline{\rho}$ - bezwymiarowa gęstość cieczy



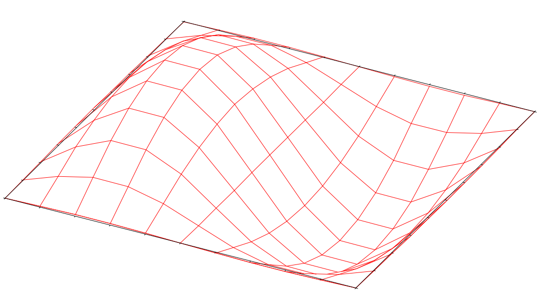
Rys. 71b. Zależność $\overline{\overline{\omega}} - \overline{\rho}$ dla płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach, gdzie $\overline{\overline{\omega}}$ - bezwymiarowa częstość drgań własnych płyty, $\overline{\rho}$ - bezwymiarowa gęstość cieczy



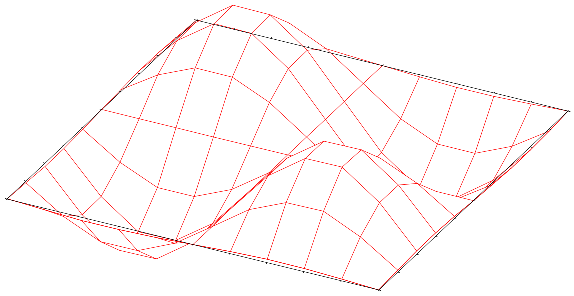
Rys. 72. Pierwsza postać drgań własnych płyty w cieczy



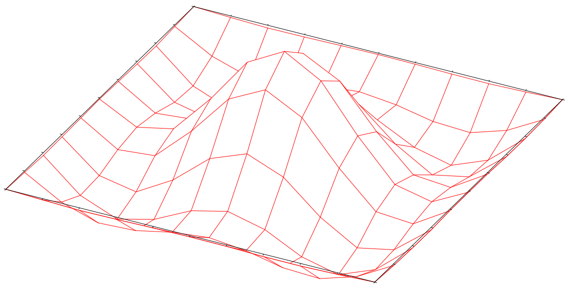
Rys. 73. Druga postać drgań własnych płyty w cieczy



Rys. 74. Trzecia postać drgań własnych płyty w cieczy



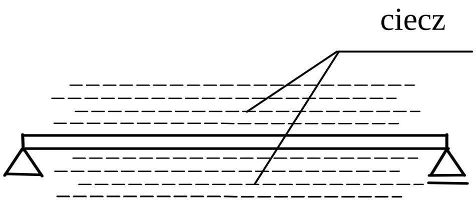
Rys. 75. Czwarta postać drgań własnych płyty w cieczy



Rys.76. Piąta postać drgań własnych płyty w cieczy

5.3.5. Drgania własne płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi zanurzonej w cieczy

Liczba elementów brzegowych: 120,
liczba mas skupionych: 100,
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 100,
μ_p - gęstość płyty na jednostkę powierzchni



Rys. 77. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi, zanurzona w cieczy

Własności płyty:

E_p = 205 GPa

ν_p = 0.3

h_p = 0.01 m

$h = l$ = 2.0 m

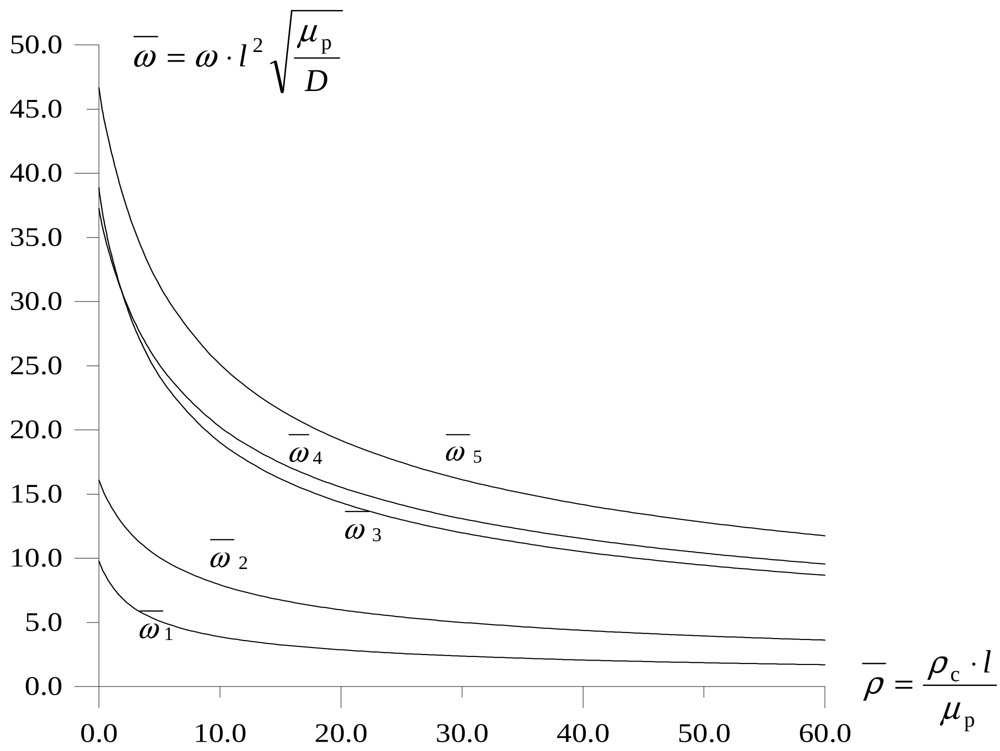
$\rho_p = 7850\ \text{kg/m}^3$

$\rho_c = 1000\ \text{kg/m}^3$

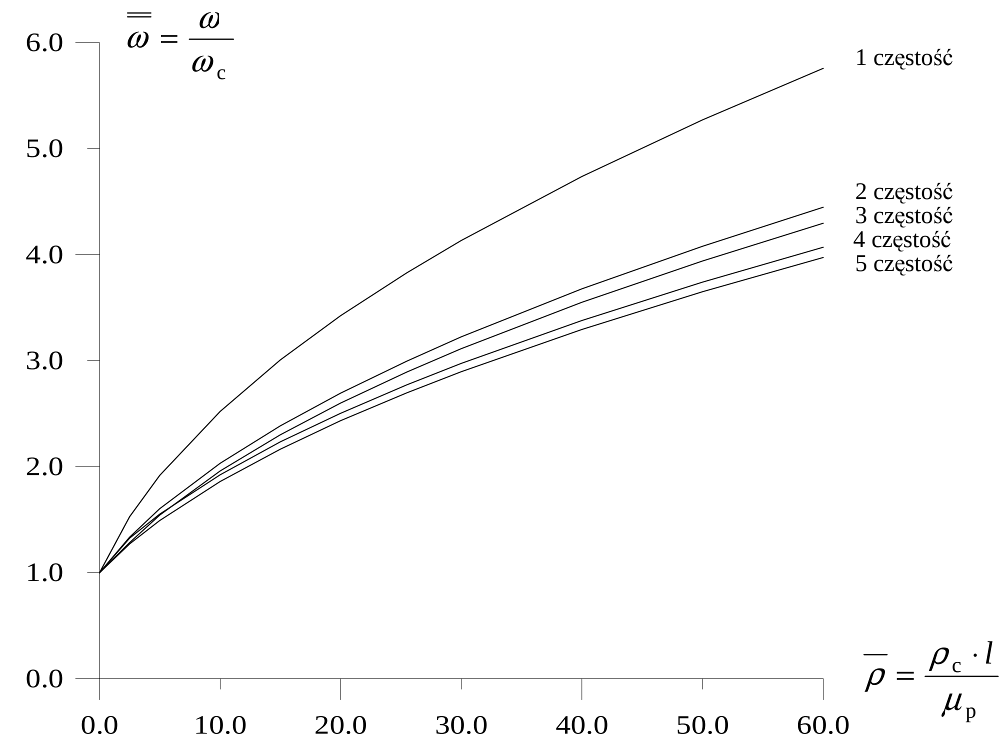
$\varepsilon = \delta / d = 0.01$

Tabela 5.5. Porównanie częstości drgań własnych

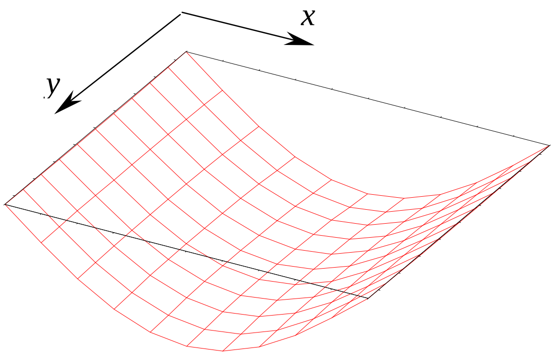
Częstość	Częstość drgań własnych [rad/s] - praca	
	Płyta **MEB**	Płyta + ciecz, **MEB** (ρ_c = 1000 kg/m^3)
1	37.820	9.882
2	62.211	20.771
3	144.054	49.823
4	150.346	54.258
5	180.438	66.916



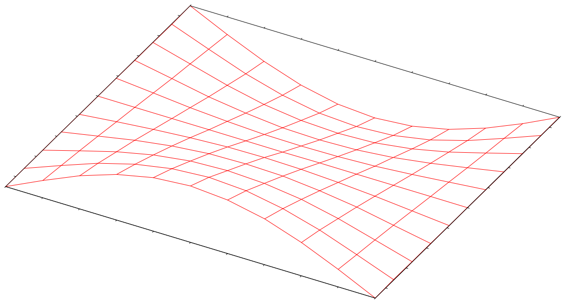
Rys. 78a. Zależność $\overline{\omega} - \overline{\rho}$ dla płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach, z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi



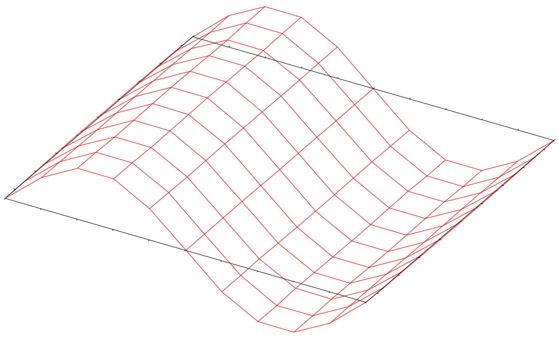
Rys. 78b. Zależność $\overline{\overline{\omega}} - \overline{\rho}$ dla płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach, z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi



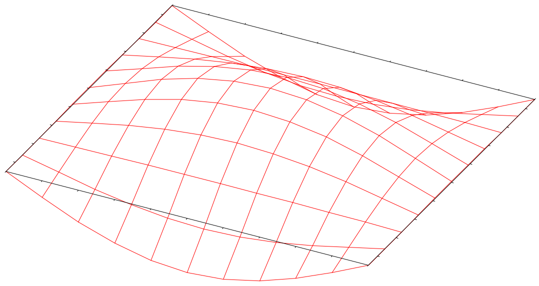
Rys. 79. Pierwsza postać drgań własnych płyty w cieczy



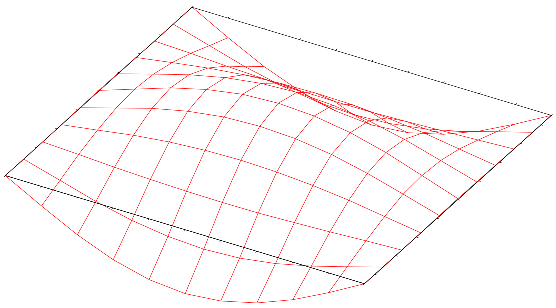
Rys. 80. Druga postać drgań własnych płyty w cieczy



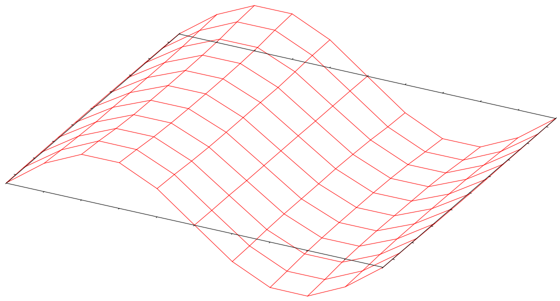
Rys. 81a. Trzecia postać drgań własnych płyty w cieczy



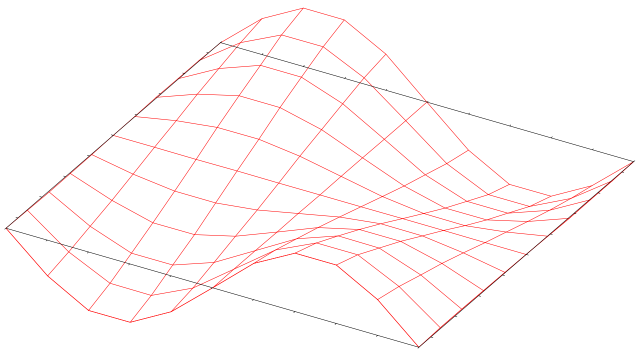
Rys. 81b. Trzecia postać drgań własnych płyty



Rys. 82a. Czwarta postać drgań własnych płyty w cieczy



Rys. 82b. Czwarta postać drgań własnych płyty



Rys. 83. Piąta postać drgań własnych płyty w cieczy

5.3.6. Drgania własne płyty wspornikowej zanurzonej w cieczy

Liczba elementów brzegowych: 120,
liczba mas skupionych: 100,
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 100,
μ_p - gęstość płyty na jednostkę powierzchni

Własności płyty:

$E_p = 205$ GPa

$\nu_p = 0.3$

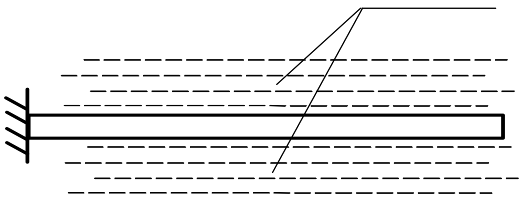
$h_p = 0.01$ m

$h = l = 2.0$ m

$\rho_p = 7850\ \mathrm{kg/m^3}$

$\rho_c = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

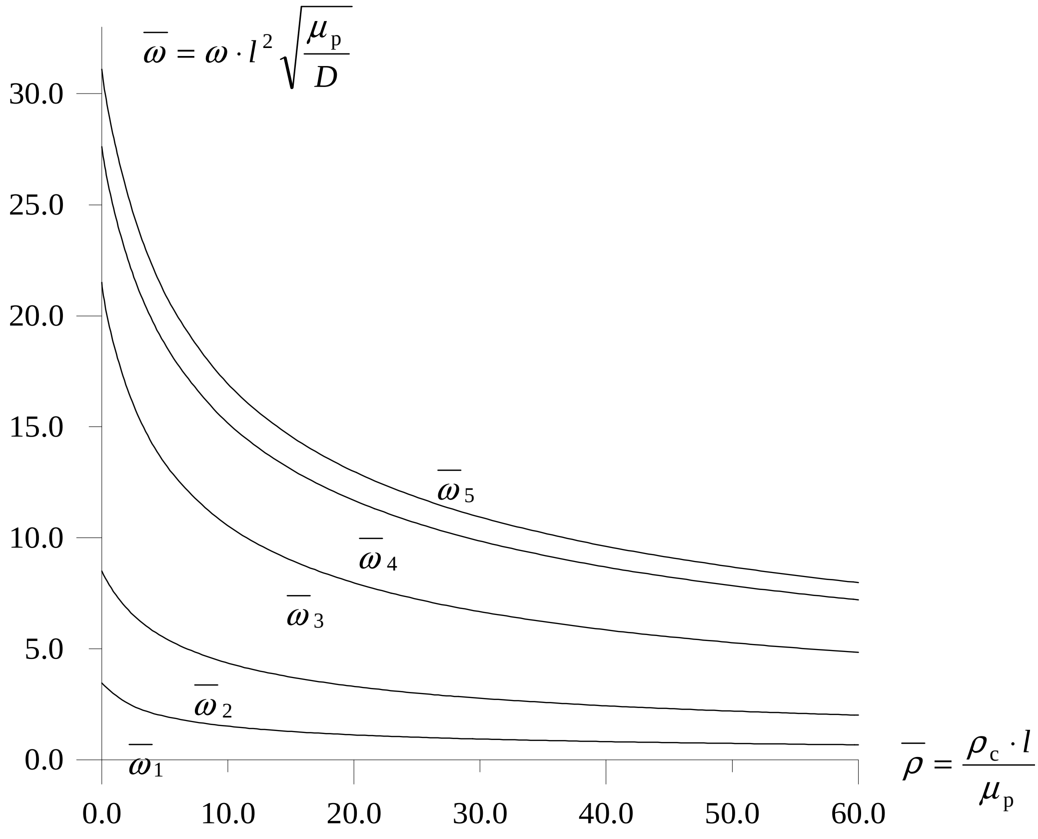
$\varepsilon = \delta / d = 0.01$



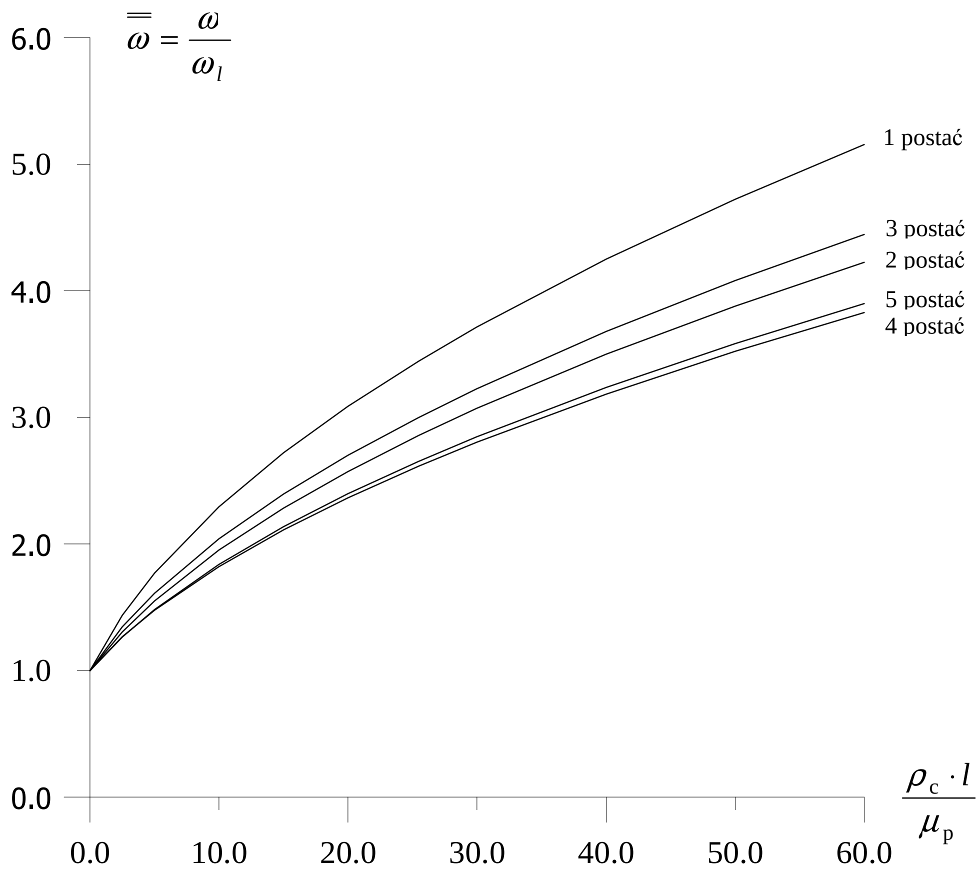
Rys. 84. Płyta wspornikowa zanurzona w cieczy

Tabela 5.6. Porównanie częstości drgań własnych

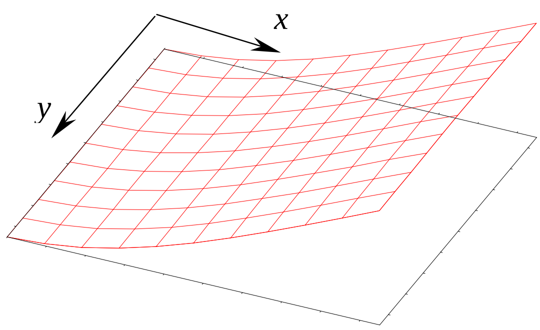
Częstość	Częstość drgań własnych [rad/s] - praca	
	Płyta **MEB**	Płyta + ciecz, **MEB** (ρ_c = 1000 kg/m^3)
1	13.385	3.886
2	32.860	11.503
3	83.157	27.721
4	106.762	40.843
5	120.241	45.327



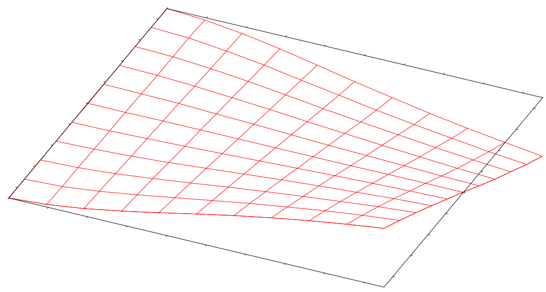
Rys. 85a. Zależność $\overline{\omega} - \overline{\rho}$ dla płyty wspornikowej,



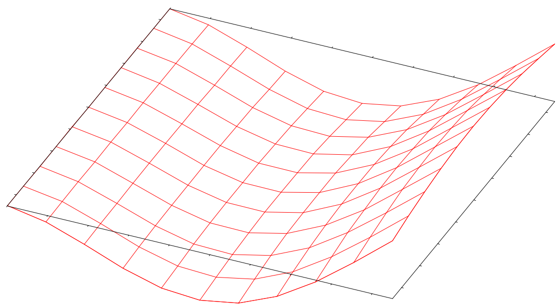
Rys. 85b. Zależność $\bar{\bar{\omega}} - \bar{\rho}$ dla płyty wspornikowej



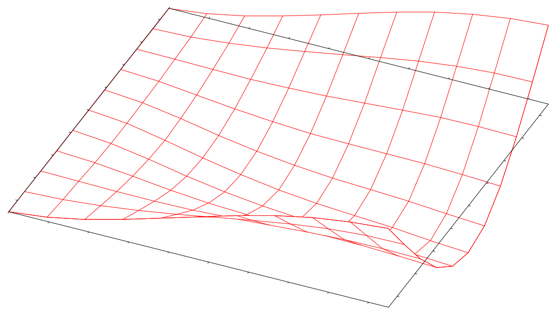
Rys. 86. Pierwsza postać drgań własnych płyty w cieczy



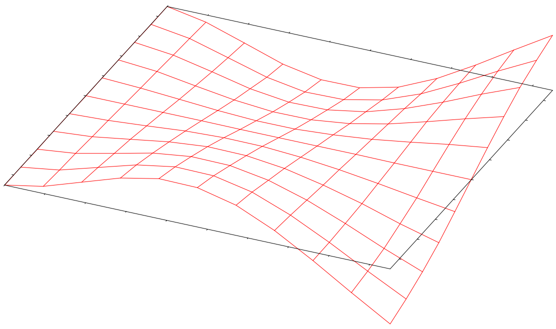
Rys. 87. Druga postać drgań własnych płyty w cieczy



Rys. 88. Trzecia postać drgań własnych płyty w cieczy



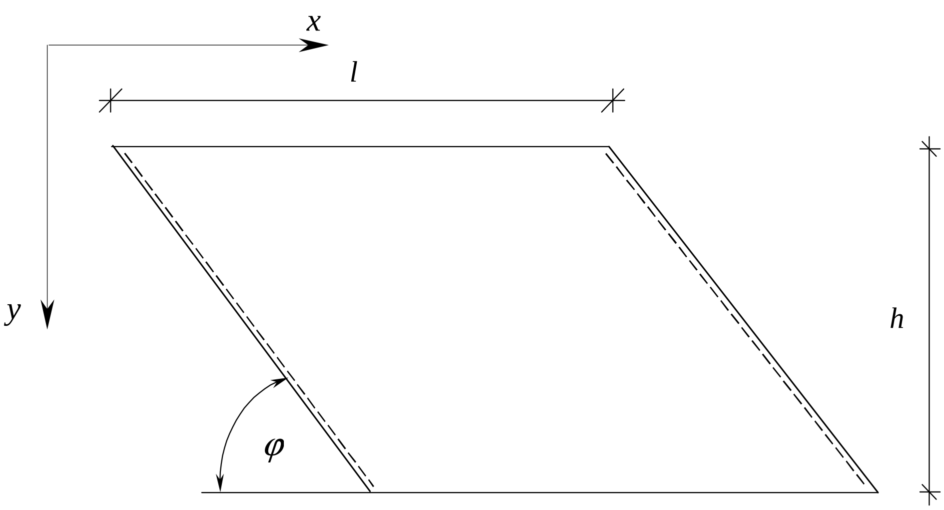
Rys. 89. Czwarta postać drgań własnych płyty w cieczy



Rys. 90. Piąta postać drgań własnych płyty w cieczy

5.3.7. Drgania własne płyty mostowej ukośnej, podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi

Liczba elementów brzegowych: 120,
liczba mas skupionych: 100



Własności płyty:

E_p = 30 GPa

ν_p = 0.167

h_p = 1.0 m

l = 15.0 m

h = 10.0 m

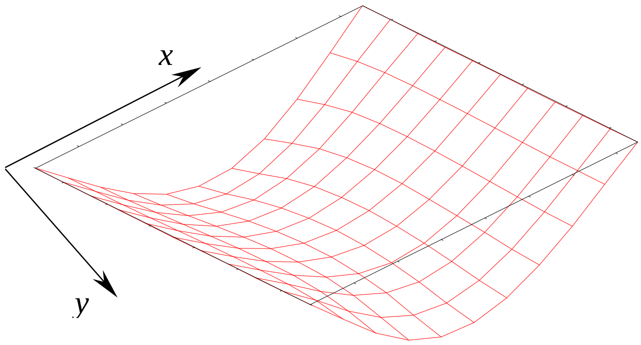
ρ_p = 2400 kg/m^3

$\varepsilon = \delta/d$ = 0.01

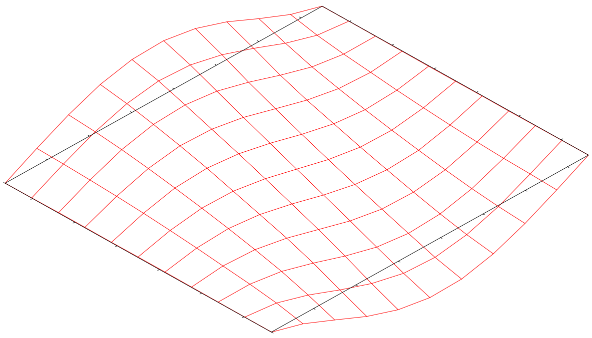
Rys. 91. Płyta mostowa skośna, podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach, z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi. $\varphi = 45^{\circ}$

Tabela 5.7. Częstości drgań własnych

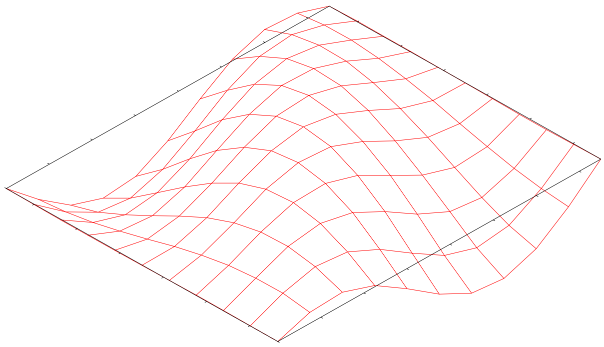
Częstość	Częstości drgań własnych [rad/s], rozwiązanie **MEB** - praca
1	77.644
2	100.515
3	196.787
4	294.194
5	381.535



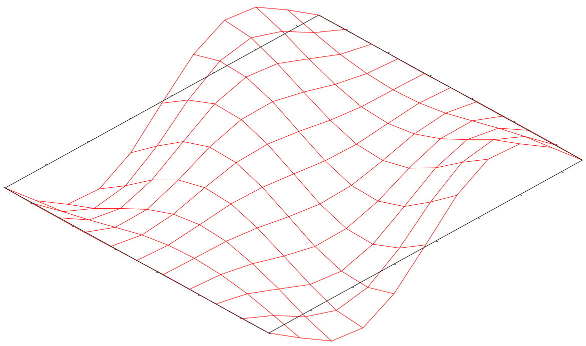
Rys. 92. Pierwsza postać drgań własnych płyty



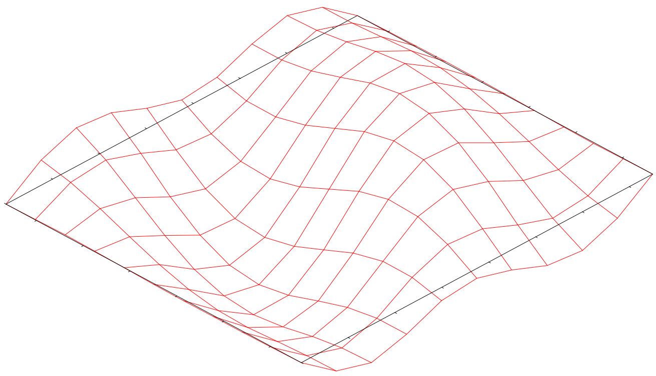
Rys. 93. Druga postać drgań własnych płyty



Rys. 94. Trzecia postać drgań własnych płyty



Rys. 95. Czwarta postać drgań własnych płyty



Rys. 96. Piąta postać drgań własnych płyty