

## 6.1. CAŁKOWE SFORMUŁOWANIE ZADANIA STATECZNOŚCI POZĄTKOWEJ PŁYTY

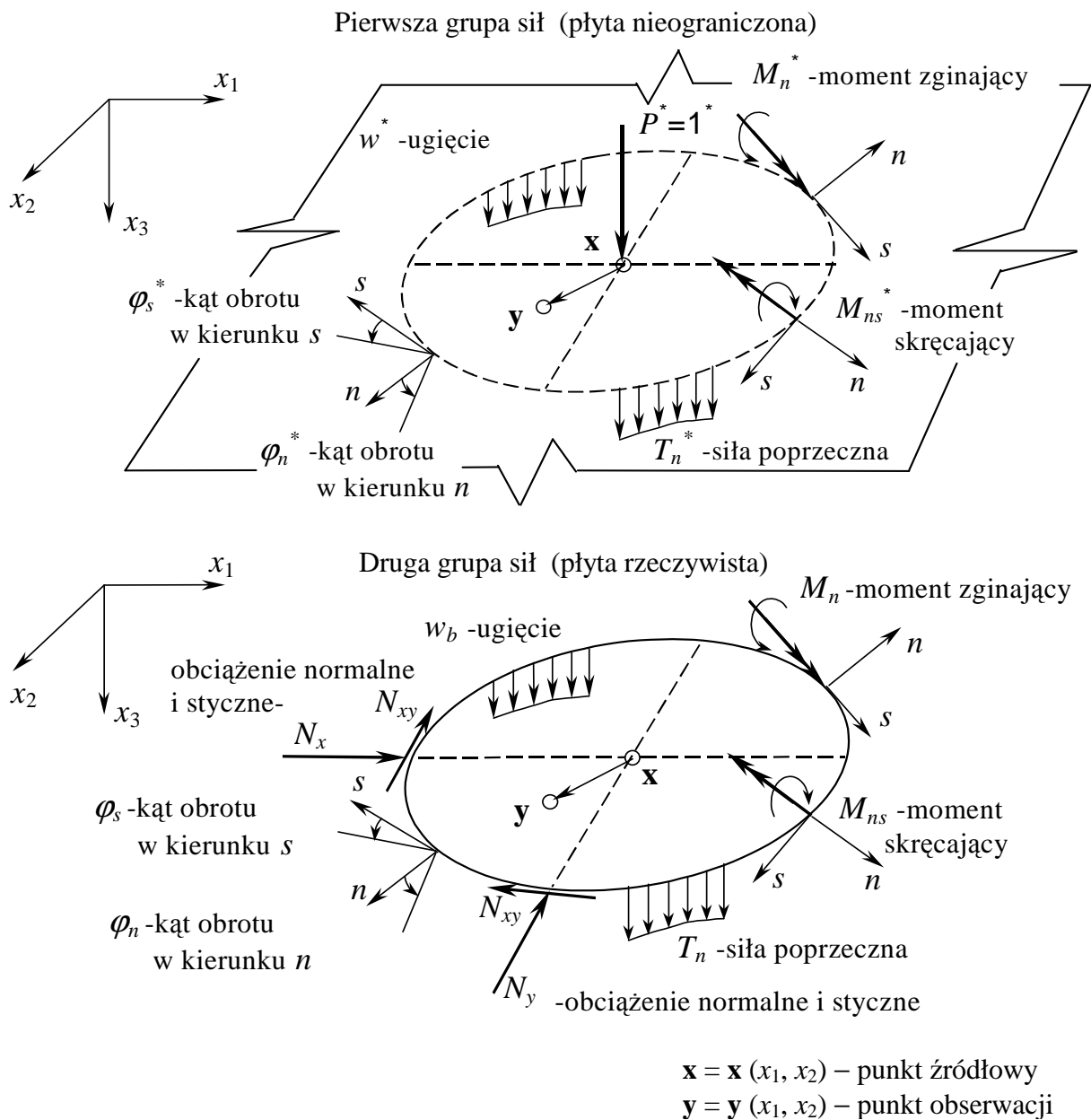
Równanie różniczkowe stateczności płyty można zapisać następująco [18]:

$$D \cdot \nabla^4 w = -\bar{p} \quad (6.1)$$

gdzie  $\bar{p}$  jest obciążeniem zastępczym, które ma postać:

$$\bar{p} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6.2)$$

Rozważa się płytę do której przyłożone jest obciążenie w jej płaszczyźnie (Rys. 97).



Rys. 97. Wielkości występujące w brzegowych równaniach całkowych

Brzegowe równania całkowe wyprowadza się wykorzystując twierdzenie o wzajemności prac Betti'ego. W miejsce obciążenia  $p$  występującego w równaniach (2.3) i (2.4) wprowadza się obciążenie zastępcze  $\bar{p}$ . W rezultacie otrzymuje się równania całkowe w postaci:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\ = \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ - \int_{\Omega} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

oraz

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [\bar{T}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{y}) - \bar{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - \bar{M}_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\ = \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \bar{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \bar{\varphi}_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ - \int_{\Omega} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{T}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{M}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{M}_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{w}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{\varphi}_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \bar{\varphi}_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left\{ T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\} \end{aligned}$$

W pracy analizuje się przypadek ściskania płyty siłami  $N_x$ . Wtedy we wzorze (6.2) występuje tylko człon  $N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ . W wewnętrznych punktach kolokacji niewiadomą będzie  $\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  czyli krzywizna płyty w kierunku  $x$  [50]. Przyjmuje się dowolny rozkład obciążenia normalnego wzdłuż brzegu płyty. Po dyskretyzacji brzegu płyty zakłada się, że rozkład siły normalnej jest stały na długości elementu (Rys. 98). Wprowadza się porównawczą siłę normalną  $N = N_{kr}$  za pomocą której wyrażono siły  $N_x^{(i)}$ . Po dyskretyzacji układ równań problemu można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_1 & -\lambda \mathbf{E}_1 \\ \Delta & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{G}}_2 & \bar{\mathbf{G}}_3 & -\lambda \bar{\mathbf{E}}_2 + \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \varphi_s \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

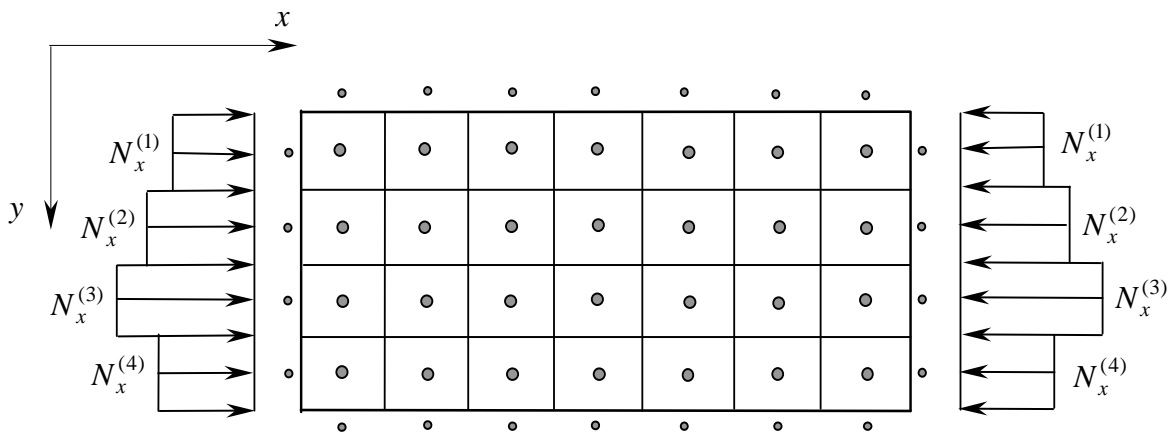
gdzie  $\lambda = N_{kr}$ ,  $\kappa = \partial^2 w / \partial x^2$  oraz  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową. Trzecie równanie w układzie równań (6.5) otrzymano po zapisaniu brzegowych równań całkowych dla wewnętrznych punktów kolokacji. W równaniu tym stosuje się rozwiązanie podstawowe otrzymane po dwukrotnym

zróżniczkowaniu po współrzędnej  $x$  funkcji podstawowych od obciążenia jednostkowego  $P^* = 1^*$ . Eliminacja wielkości brzegowych  $\mathbf{X}$  oraz  $\varphi_s$  z równania macierzowego (6.5) prowadzi do standardowego problemu własnego:

$$\{\mathbf{B} - \bar{\lambda} \cdot \mathbf{I}\} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

gdzie  $\bar{\lambda} = 1/\lambda$  oraz

$$\mathbf{B} = \{\bar{\mathbf{E}}_2 - (\bar{\mathbf{G}}_2 - \bar{\mathbf{G}}_3 \Delta) \cdot [\mathbf{G}_X + \mathbf{G}_1]^{-1} \mathbf{E}_1\} \quad (6.7)$$



Rys. 98. Dyskretyzacja brzegu i powierzchni płyty przy zastosowaniu elementów brzegowych typu „constans” oraz rozkład obciążenia siłą normalną

## 6.2. POSTACIE WYBOCZENIA

Po rozwiązaniu problemu własnego należy jeszcze znaleźć postacie wyboczenia płyty, czyli obliczyć ugięcia płyty w wewnętrznych punktach kolokacji. Wektory własne  $\boldsymbol{\kappa}$  uzyskane po rozwiązaniu problemu własnego (6.6) przedstawiają bowiem krzywizny płyty po wyboczeniu. Układ równań algebraicznych do obliczenia wektora własnego  $\mathbf{w}$  ma postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_X & \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \Delta & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \varphi_s \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{E}_1 \boldsymbol{\kappa} \\ \mathbf{0} \\ \lambda \mathbf{E}_2 \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

W układzie równań algebraicznych (6.8) dwa pierwsze równania otrzymano z dwóch pierwszych równań (6.5), a trzecie równanie uzyskuje się po zapisaniu brzegowych równań całkowych na obliczanie ugięcia płyty w wewnętrznych punktach kolokacji. Eliminacja wielkości brzegowych  $\mathbf{X}$  i  $\varphi_s$  z równania macierzowego (6.8) pozwala obliczyć elementy poszukiwanego wektora przemieszczenia

$$\mathbf{w} = \lambda \left[ \mathbf{E}_2 - (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_3 \Delta) \cdot [\mathbf{G}_X + \mathbf{G}_1]^{-1} \mathbf{E}_1 \right] \boldsymbol{\kappa} \quad (6.9)$$

### 6.3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

W podrozdziałach 6.3.1. - 6.3.6. Rozważany jest problem stateczności płyty kwadratowej podpartej swobodnie na czterech krawędziach oraz płyty kwadratowej podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi. Dla każdej z nich poszukuje się obciążenia krytycznego o rozkładzie stałym i liniowo zmiennym. W celu uproszczenia oznaczeń przyjęto, że oś  $x_1$  odpowiada oznaczeniu osi  $x$ , a oś  $x_2$  odpowiada osi  $y$  globalnego układu współrzędnych.

#### 6.3.1. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach poddana stałemu obciążeniu normalnemu

Liczba elementów brzegowych: 64,  
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256.

Własności płyty:

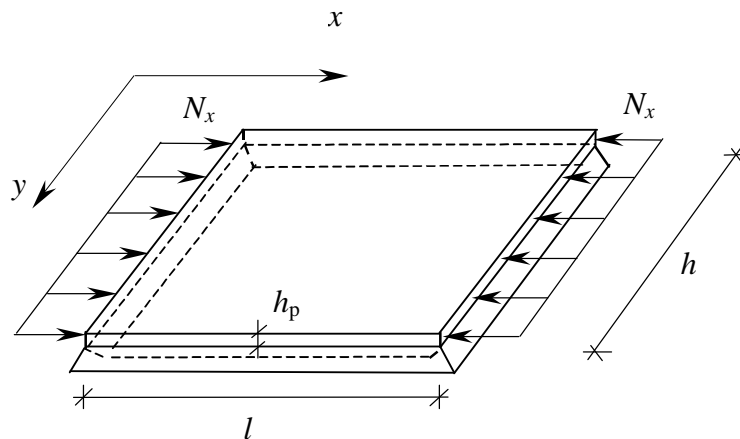
$$E_p = 205 \text{ GPa}$$

$$\nu_p = 0.3$$

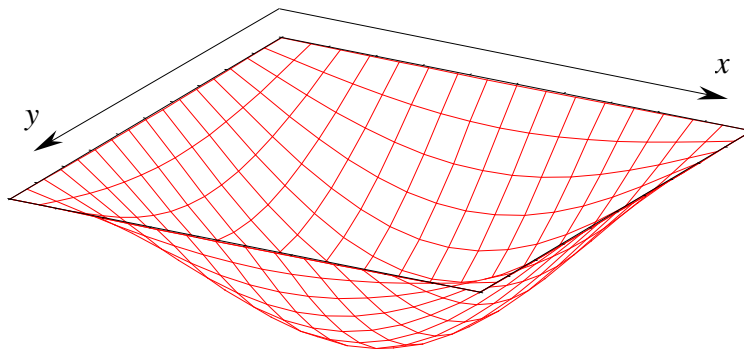
$$h_p = 1 \text{ cm}$$

$$h = l = 100 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = \delta/d = 0.01$$



Rys. 99. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach, poddana stałemu obciążeniu normalnemu



Rys. 100. Pierwsza postać wybożenia płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach, poddanej stałemu obciążeniu normalnemu

Tabela 6.1. Wartości sił krytycznych

$N_{kr}$ [kN/cm ]	Rozwiązanie analityczne [18,59]	Rozwiązanie <b>MEB</b> - praca
1	7.411	7.438
2	11.580	11.675
3	20.587	20.912

### 6.3.2. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

Liczba elementów brzegowych: 64,  
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256.

Własności płyty:

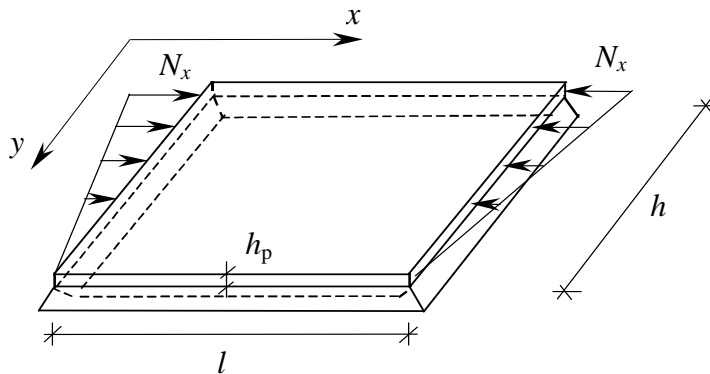
$$E_p = 205 \text{ GPa}$$

$$\nu_p = 0.3$$

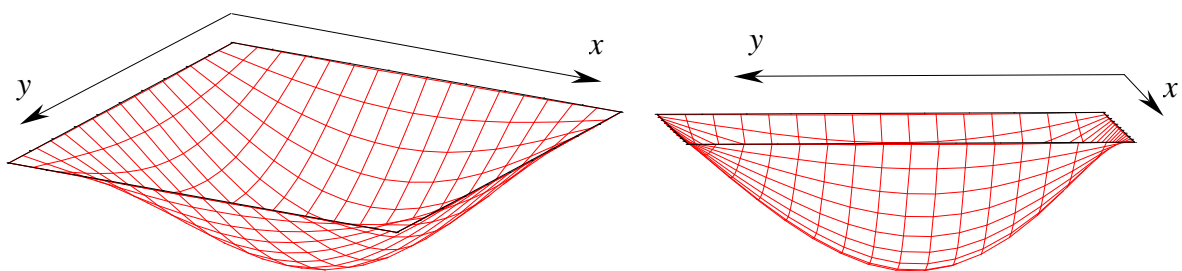
$$h_p = 1 \text{ cm}$$

$$h = l = 100 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = \delta/d = 0.01$$



Rys. 101. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach, poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu



Rys. 102. Pierwsza postać wyboczenia płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach poddanej liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

Tabela 6.2. Wartości sił krytycznych

$N_{kr}$ [kN/cm ]	Rozwiązanie analityczne [59]	Rozwiązanie <b>MEB</b> - praca
1	14.452	14.529
2	-	21.728
3	-	36.491

### 6.3.3. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach poddana liniowo zmiennym obciążeniom normalnym

Liczba elementów brzegowych: 64,

liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256.

Własności płyty:

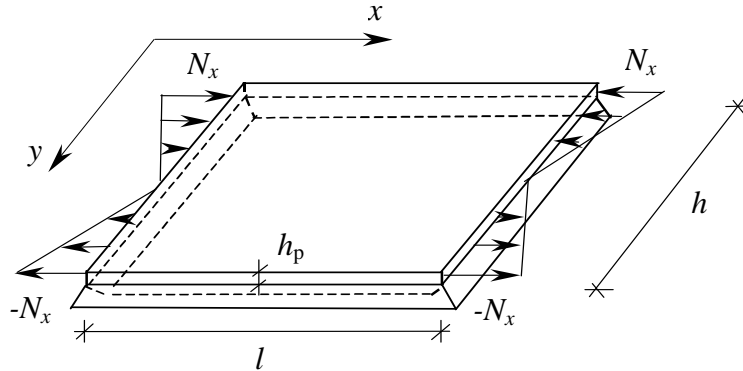
$$E_p = 205 \text{ GPa}$$

$$\nu_p = 0.3$$

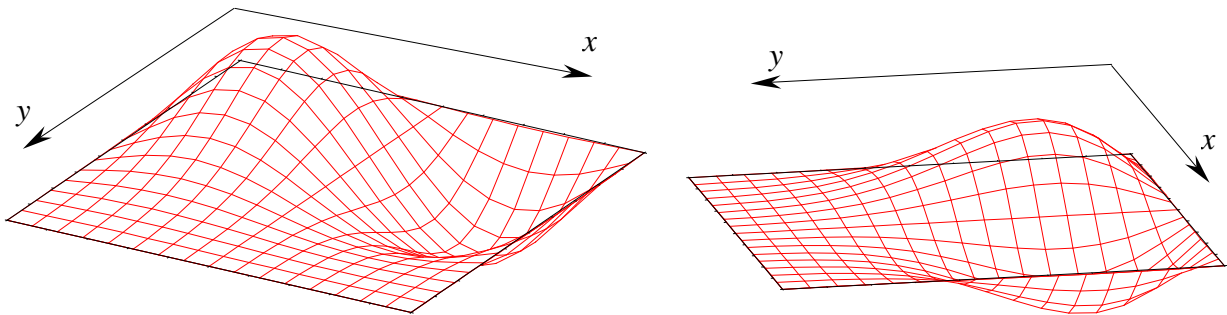
$$h_p = 1 \text{ cm}$$

$$h = l = 100 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = \delta/d = 0.01$$



Rys. 103. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach, poddana liniowo zmiennym obciążeniom normalnym



Rys. 104. Pierwsza postać wybočenja płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach, poddanej liniowo zmiennym obciążeniom normalnym

Tabela 6.3. Wartości sił krytycznych

$N_{kr}$ [kN/cm ]	Rozwiązanie analityczne [59]	Rozwiązanie <b>MEB</b> - praca
1	47.432	47.838
2	-	50.539
3	-	63.906

### 6.3.4. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddana stałemu obciążeniu normalnemu

Liczba elementów brzegowych: 64,  
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256.

Własności płyty:

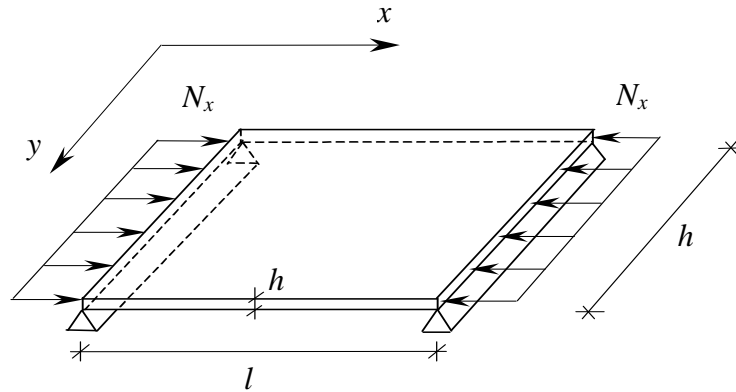
$$E_p = 205 \text{ GPa}$$

$$\nu_p = 0.3$$

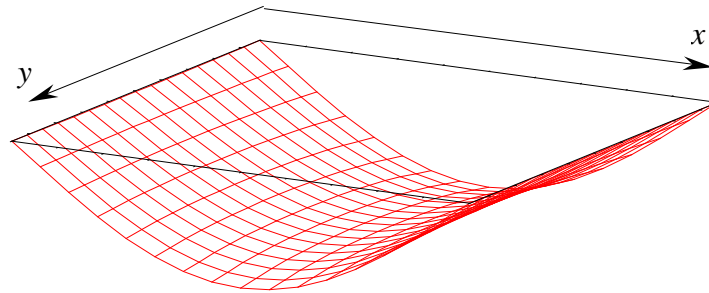
$$h_p = 1 \text{ cm}$$

$$h = l = 100 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = \delta/d = 0.01$$



Rys. 105. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi, poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu



Rys. 106. Pierwsza postać wybożenia płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi, poddanej liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

Tabela 6.4. Wartości sił krytycznych

$N_{kr}$ [kN/cm ]	Rozwiązanie <b>MEB</b> - praca
1	1.765
2	4.819
3	7.168

### 6.3.5. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

Liczba elementów brzegowych: 64,  
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256.

Własności płyty:

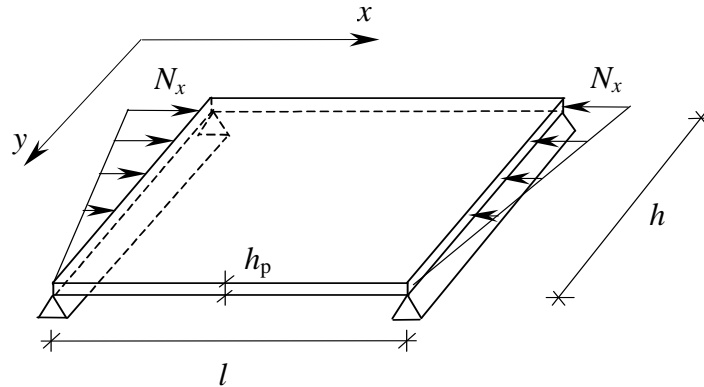
$$E_p = 205 \text{ GPa}$$

$$\nu_p = 0.3$$

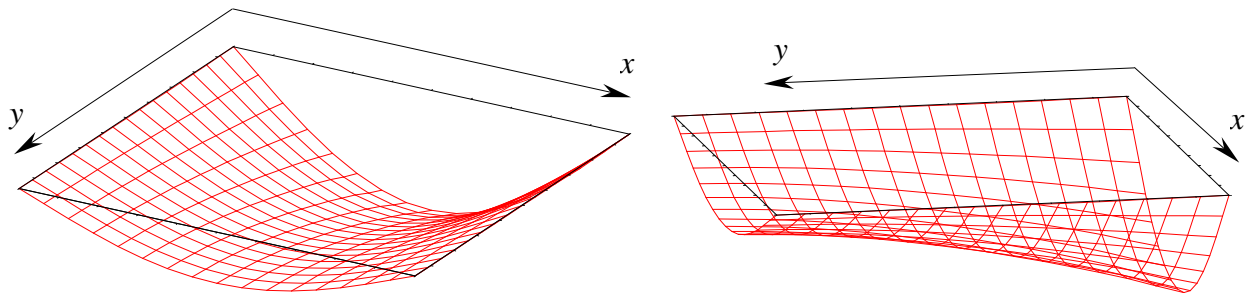
$$h_p = 1 \text{ cm}$$

$$h = l = 100 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = \delta/d = 0.01$$



Rys. 107. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi, poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu



Rys. 108. Pierwsza postać wyboczenia płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi, poddanej liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

Tabela 6.5. Wartości sił krytycznych

$N_{kr}$ [kN/cm]	Rozwiązanie <b>MEB</b> - praca
1	3.028
2	10.238
3	15.290



### 6.3.6. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnym

Liczba elementów brzegowych: 64,  
liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256.

Własności płyty:

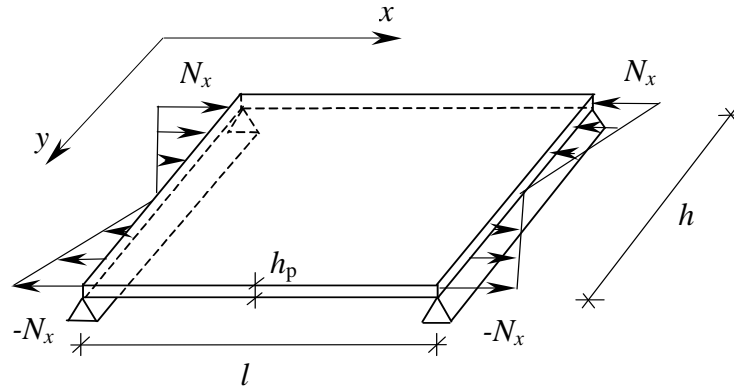
$$E_p = 205 \text{ GPa}$$

$$\nu_p = 0.3$$

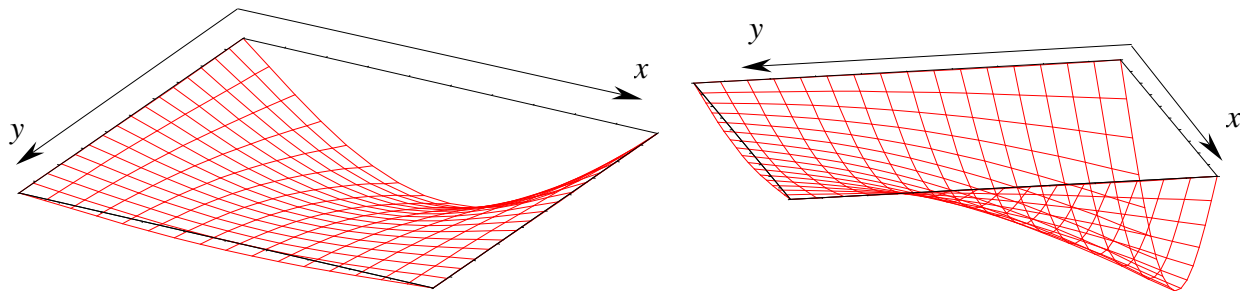
$$h_p = 1 \text{ cm}$$

$$h = l = 100 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = \delta/d = 0.01$$



Rys. 109. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi, poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnym



Rys. 110. Pierwsza postać wybożenia płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddanej liniowo zmiennemu obciążeniu normalnym

Tabela 6.6. Wartości sił krytycznych

$N_{kr}$ [kN/cm ]	Rozwiązanie <b>MEB</b> - praca
1	4.754
2	12.875
3	25.166